DESARROLLO PARCIAL AUX 5

PRODUCTO CARTESIANO, CONJUNTO POTENCIA Y FUNCIONES

MA1101-5
2025-1

Profesor: Jorge Aguayo A.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

Auxiliar 5: conjuntos, $\times$, $\mathcal{P}(\cdot)$, f's

[P1 de este aux es ~~...~~ un problema no hecho en el anterior!]

$\mathcal{U} \neq \emptyset$ conjunto de referencia. $A, B \subseteq \mathcal{U}$

P.D.Q. $\left((\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})) : A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y\right) \Rightarrow A = \emptyset$.

En efecto,

Por demostración directa:

Supóngase cierta la hipótesis i.e. que al tener la igualdad de A unido a otro conjunto asegura que dichos conjuntos son iguales. Se quiere ver que $A = \emptyset$.

La idea es usar la hipótesis convenientemente $\rightarrow$ elegir X, Y apropiados.

Notar que $\begin{cases} A \cup \emptyset = A \\ A \cup A = A \end{cases}$. Luego $A \cup \emptyset = A = A \cup A \underset{\text{H}}{\Longrightarrow} A = \emptyset$ Q.E.D. ☐

P.D.Q. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

Por doble implicancia:

$\Rightarrow$) Supóngase $A \cap B = \emptyset$.

Luego $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \underset{\text{prop.}}{=} \mathcal{P}(A \cap B) \underset{\text{H}}{=} \mathcal{P}(\emptyset) \underset{\text{def.}}{=} \{\emptyset\}$ ☐

def. $\downarrow$ pensar

Dem) Sea $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$

$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$

$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$

— o —

$\Leftarrow$) Supóngase $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

Como $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \underset{\text{prop.}}{=} \mathcal{P}(A \cap B)$

$\Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset\} \underset{\text{prop. (pensar).}}{\Rightarrow} A \cap B = \emptyset$ ☐

Demostrando así lo pedido. ☐

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$

$$\begin{cases} f_{\alpha,\beta}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x + \beta \end{cases}$$

$$G := \{ f_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \}$$

P.D.Q. $Id_{\mathbb{R}} \in G$ es la función identidad $\begin{cases} Id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Id_{\mathbb{R}}(x) = x \end{cases}$

asigna al mismo elemento

$Id_{\mathbb{R}} \in G \Leftrightarrow Id_{\mathbb{R}} = f_{\alpha,\beta}$, algún $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G_{Id_{\mathbb{R}}}) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G_{f_{\alpha,\beta}})$

Ya coinciden en Dom y Cod. Falta ver cómo coincidirían en el grafo i.e. con la regla de asociación.

Sea $x \in \mathbb{R}$. $Id_{\mathbb{R}}(x) = f_{\alpha,\beta}(x) \Leftrightarrow x = \alpha x + \beta$

$\Leftrightarrow \alpha = 1 \wedge \beta = 0.$

Luego, basta tomar $\begin{cases} \alpha = 1 \neq 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$ y se tiene lo pedido. ▣

Japa / Llapa (?)

Veamos que $f_{\alpha,\beta}$ es función i.e. $(\forall x \in Dom(f_{\alpha,\beta}))(\exists! y \in Cod(f_{\alpha,\beta})): f_{\alpha,\beta}(x) = y$

En efecto,

Sea $x \in Dom(f_{\alpha,\beta}) = \mathbb{R}$ arbitrario.

P.D.Q. $\exists! y \in Cod(f_{\alpha,\beta}) = \mathbb{R}$ t.q. $f_{\alpha,\beta}(x) = y$.

Se sabe que $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x + \beta \in \mathbb{R}$

si se tomamos $y := \alpha x + \beta$, será el único que lo cumple pues α, x, β están fijos.

Q.E.D. ▣

$\mathbb{Z} \neq \phi$, $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \phi$.

$$\begin{cases} f: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \\ X \mapsto f(X) = X \setminus A \end{cases} \qquad \begin{cases} g: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \\ X \mapsto g(x) = X \cup A \end{cases}$$

$$\begin{cases} F: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \\ \overset{\shortparallel}{f \circ g} \quad X \mapsto F(x) = (X \cup A) \setminus A \end{cases} \qquad \begin{cases} G: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \\ \overset{\shortparallel}{g \circ f} \quad X \mapsto G(X) = (X \setminus A) \cup A \end{cases}$$

P.D.Q. están bien definidas como funciones

$\Leftrightarrow (\forall X \in Dom(\cdot))(\exists! Y \in Cod(\cdot)) : \cdot(X) = Y$

$\underline{f}$| Sea $X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow X \subseteq \mathbb{Z}$.

P.D.Q. $\exists! Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ t.q. $f(X) = Y$.

Basta tomar $Y = X \setminus A$, pues $X \subseteq \mathbb{Z}, A^c \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow X \cap A^c \subseteq \mathbb{Z} \Leftrightarrow X \cap A^c \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

y satisface que $X \setminus A = f(Y)$.

(Supóngase, que $Y_1 = X_1 \setminus A$, $Y_2 = X_2 \setminus A$ y $Y_1 = f(X)$ y $Y_2 = f(X)$, con $X_1 \neq X_2$.

Luego $Y_1 = f(X) = Y_2 \Leftrightarrow X_1 \setminus A = X \setminus A = X_2 \setminus A \Rightarrow X_1 = X$ y $X_2 = X$

$\Rightarrow X_1 = X_2$ $\rightarrow\!\leftarrow$

No pueden existir 2 que cumplan lo mismo, pues son iguales!)

$\square$

El argumento es análogo en todas las funciones.

Lo importante es: 1°) Notar existencia ← justificar que vive en el codominio

2°) justificar unicidad!

P.D.Q. $F=f$ y $G=g$

$F=f$ | P.D.Q. $(Dom(F), Cod(F), G_F) = (Dom(f), Cod(f), G_f)$

Hay que ver la igualdad de tuplas.

- $Dom(F) = \mathcal{P}(Z) = Dom(f)$ //
- $Cod(F) = \mathcal{P}(Z) = Cod(f)$ //

Falta ver regla de asociación.

P.D.Q. $F(X) = f(X)$, para $X \in \mathcal{P}(Z)$ arbitrario.

En efecto, $(X \cup A) \setminus A = X \setminus A$

$$\Leftrightarrow (X \cup A) \cap A^c = X \setminus A$$
$$\Leftrightarrow (X \cap A^c) \cup (\underbrace{A \cap A^c}_{=\emptyset}) = X \setminus A$$
$$\Leftrightarrow X \cap A^c = X \setminus A$$
$$\Leftrightarrow X \setminus A = X \setminus A \Leftrightarrow V //$$

Se concluye $F=f$. Q.E.D. $\boxtimes$

$G=g$ | P.D.Q. $(Dom(G), Cod(G), G_G) = (Dom(g), Cod(g), G_g)$.

Análogamente se tiene la igualdad en $Dom(\cdot)$ y $Cod(\cdot)$. //

Falta ver en regla de asociación.

P.D.Q. $G(X) = g(X)$, para $X \in \mathcal{P}(Z)$ arbitrario.

En efecto, $(X \setminus A) \cup A = X \cup A$

$$\Leftrightarrow (X \cap A^c) \cup A = X \cup A$$
$$\Leftrightarrow (X \cup A) \cap (A^c \cup A) = X \cup A$$
$$\Leftrightarrow (X \cup A) \cap Z = X \cup A$$
$$\Leftrightarrow X \cup A = X \cup A \Leftrightarrow V //$$

Se concluye $G=g$. Q.E.D. $\boxtimes$

P6 $\begin{cases} J: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A \cup B) \\ \quad (X,Y) \mapsto J((X,Y)) = X \cup Y \end{cases}$

P.D.Q. J es función

$\Leftrightarrow (\forall x \in Dom(J))(\exists! y \in Cod(J)): J(x) = y$

$\Leftrightarrow (\forall (W,Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B))(\exists! Q \in \mathcal{P}(A \cup B)): J((W,Z)) = Q.$

En efecto,

Sea $(W,Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ arbitrario.

Notar que $W \cup Z \in \mathcal{P}(A \cup B)$ pues $\left.\begin{array}{l} W \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow W \subseteq A \\ Z \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow Z \subseteq B \end{array}\right\} \begin{array}{l} W \cap Z \subseteq A \cap B \\ \Leftrightarrow W \cap Z \in \mathcal{P}(A \cap B) \end{array}$

Luego, basta tomar $Q = W \cup Z \in \mathcal{P}(A \cup B)$, que será único. Q.E.D. $\blacksquare$

P.D.Q. $(\forall B \in \mathcal{M}_A)(\forall Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})): B \cap Y \in \mathcal{M}_A$

Sea $B \in \mathcal{M}_A$ arbitrario. $\Leftrightarrow B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \wedge A \cap B = \phi$.

Sea $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ arbitrario $\Leftrightarrow Y \subseteq \mathbb{Z}$.

P.D.Q. $B \cap Y \in \mathcal{M}_A$

$\Leftrightarrow B \cap Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \wedge A \cap (B \cap Y) = \phi$

En efecto,

Como $\left.\begin{array}{l} B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow B \subseteq \mathbb{Z} \\ Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow Y \subseteq \mathbb{Z} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow B \cap Y \subseteq \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow B \cap Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) // \end{array}$

Además, $A \cap (B \cap Y) = \underbrace{(A \cap B)}_{\substack{= \phi \\ B \in \mathcal{M}_A}} \cap Y = \phi \cap Y \underset{\text{prop.}}{=} \phi //$

Luego $B \cap Y \in \mathcal{M}_A$. ■

P.D.Q. $B, C \in \mathcal{M}_A \Rightarrow B \Delta C \in \mathcal{M}_A$.

Sean $B, C \in \mathcal{M}_A$ i.e. $B, C \subseteq \mathbb{Z}$ y $A \cap B = \phi = A \cap C$.

P.D.Q. $B \Delta C \in \mathcal{M}_A \Leftrightarrow B \Delta C \subseteq \mathbb{Z}$ y $(B \Delta C) \cap A = \phi$.

En efecto,

- $B \Delta C = (B \cup C) \setminus (B \cap C) = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = (B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)$.

Como $B, C \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow B^c, C^c \subseteq \mathbb{Z}. \Rightarrow B \cap C^c, C \cap B^c \subseteq \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (B \cap C^c) \cap (C \cap B^c) \subseteq \mathbb{Z} //$

- $(B \Delta C) \cap A = [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] \cap A$

$$
\begin{aligned}
&= [(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)] \cap A \\
&= [(B \cap C^c) \cap A] \cup [(C \cap B^c) \cap A] \\
&= [C^c \cap \underbrace{(B \cap A)}_{\neq \phi}] \cup [B^c \cap \underbrace{(C \cap A)}_{= \phi}] \\
&= \phi \cup \phi = \phi //
\end{aligned}
$$

■

Nosotr@s adentrándonos a objetos más elaborados:

Y siempre recuerden:

el conjunto de las partes es un conjunto de conjuntos (en algún momento todo hará click y dejará de sonar como si fuese un trabalenguas).

Éxito en tu estudio!

Umi

Pinkshinyultrablast