

DESARROLLO P A R C I A L AUX 4

CONJUNTOS

MA1101-5
2025-1

Profesor: Jorge Aguayo A.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

A, B, C, D t.q. $A \subseteq C; B \subseteq D$ } literalmente es una propiedad conocida; en que hay que demostrarla!
P.D.D. $A \cap B \subseteq C \cap D$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in U): x \in A \cap B \Rightarrow x \in C \cap D$$

En efecto,

Sea $x \in U$ t.q. $x \in A \cap B$ i.e. $x \in A$ y $x \in B$.

Se quiere ver que $x \in C \cap D \Leftrightarrow x \in C \wedge x \in D$.

De hecho, como $A \subseteq C$ y $x \in A \Rightarrow x \in C$.

Análogamente (como $B \subseteq D$ y $x \in B$) $\Rightarrow x \in D$.

Como $x \in C$ y $x \in D \Rightarrow x \in C \cap D$. Q.E.D. $\square$

P.D.D. $X \subseteq C \wedge X \subseteq D \Rightarrow X \subseteq (C \cap D)$

Es una equivalencia en que la idea es hacerla por doble implicación.

$\Rightarrow$ | P.D.D. $X \subseteq C \wedge X \subseteq D \Rightarrow X \subseteq (C \cap D)$

Es directo por la parte anterior.

Usando $A=X$ y $B=X \Rightarrow X \cap X \subseteq C \cap D$

$$\Leftrightarrow X \subseteq (C \cap D). \text{ Q.E.D. } \square$$

$\Leftarrow$ | P.D.D. $X \subseteq (C \cap D) \Rightarrow X \subseteq C \wedge X \subseteq D$.

En efecto,

Supongamos que $X \subseteq (C \cap D)$ i.e. $(\forall x \in U): x \in X \Rightarrow x \in (C \cap D)$

Se quiere ver que $X \subseteq C \wedge X \subseteq D$.

Sea $x \in U$ arbitrario t.q. $x \in X \Rightarrow x \in C \cap D$

$$\Rightarrow x \in C \wedge x \in D$$

$$\Rightarrow X \subseteq C \wedge X \subseteq D \text{ Q.E.D. } \square$$

-o-

Otra forma: Como $C \cap D \subseteq C$ y $C \cap D \subseteq D$, y $X \subseteq C \cap D$
 $\Rightarrow X \subseteq C \wedge X \subseteq D. \square$

P.D.Q. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq C$

Equivalencia $\leftrightarrow$ doble implicación

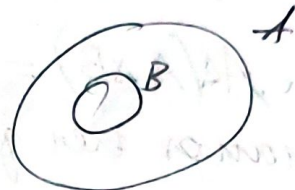
$\Rightarrow$ $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq C$

Ya lo hicimos! 8)

$\Leftarrow$ P.D.Q. $B \subseteq A \wedge A \subseteq C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$

En efecto,

Notar que $A \cup B = A$, pues $B \subseteq A$



Notar que $A \cap C = A$, pues $A \subseteq C$



Luego $A \cup B = A = A \cap C$

$\Rightarrow A \cup B = A \cap C$ Q.E.D. $\square$

A, B, C conjuntos.

P.D.Q. $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

En efecto,

Por demostración directa,

Supongamos que $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow V$.

Se quiere ver que $B = C$.

Como $A \Delta B = A \Delta C \quad / \quad A \Delta$

$$\Rightarrow A \Delta (A \Delta B) = A \Delta (A \Delta C)$$

Quisieramos ver que son iguales. Trabajemos cada expresión:

$$A \Delta (A \Delta B) = (A \cap (A \Delta B)^c) \cup ((A \Delta B) \cap A^c)$$

$$= (A \cap ((A \cup B) \cap (A \cap B)^c)^c) \cup (((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap A)$$

$$= (A \cap ((A \cup B)^c \cup (A \cap B))) \cup ([\underbrace{(A \cap B^c) \cap A^c}_{=\emptyset}] \cup [(B \cap A^c) \cap A])$$

$$= (A \cap ((A^c \cap B)^c \cup (A \cap B))) \cup (\emptyset \cup [B \cap A^c])$$

$$= (\underbrace{[A \cap (A^c \cap B^c)]}_{=\emptyset} \cup [A \cap (A \cap B)]) \cup (B \cap A^c)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$$

$$= B \cap (A \cup A^c)$$

$$= B \cap U$$

$$= B //$$

Luego $\underbrace{A \Delta (A \Delta B)}_{(1)} = B$ y $\underbrace{A \Delta (A \Delta C)}_{(2)} = C \Rightarrow B = C$. Q.E.D.

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cap B)^c}$$

"análogo"

① $\neq$ ②

↓

P.D.Q. $A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C$

En efecto,

Se assume que $A \Delta B = C$.

Se quiere ver que $B = A \Delta C$.

Pero notan que $A \Delta C = A \Delta (A \Delta B) \dots$ hipotesis
 $= B$ (lo calculamos ya!)

Q.E.D.

P.D.Q. $A \Delta B \Delta C = A \cup B \cup C \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

En efecto:

$$A \Delta B \Delta C = A \cup B \cup C / \Delta C$$

$$\Leftrightarrow (A \Delta B \Delta C) \Delta C = (A \cup B \cup C) \Delta C$$

$$\Leftrightarrow A \Delta B \Delta (C \Delta C) = (A \cup B \cup C) \Delta C \quad (U \setminus C) \cup \emptyset$$

anot.

$$\Leftrightarrow A \Delta (B \Delta \emptyset) = (A \cup B \cup C) \Delta C$$

def. 1



$$\Leftrightarrow A \Delta B = (A \cup B \cup C) \Delta C \quad ; \quad C = (A \cup B)^c$$

phi siempre - A

$$\Rightarrow (A \cup B) \cup C = U$$

$$U \Delta C = C^c$$

$$\Leftrightarrow A \Delta B = C^c \Leftrightarrow A \Delta B = (A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = A \cup B$$

$$\Leftrightarrow A \cup B \subseteq (A \cap B)^c \dots \text{pensar!}$$

$$\Leftrightarrow A \cap B \subseteq A^c \cap B^c / \cap B$$

$$\Leftrightarrow A \cap B \subseteq \emptyset \text{ y } \emptyset \subseteq A \cap B \text{ siempre!} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \quad \text{Q.E.D.}$$

U conjunto universo ; $A \subseteq U$; $A \neq \emptyset$.

$\mathcal{F}_A = \{B \subseteq U \mid B \cap A \neq \emptyset\}$ familia de subconjuntos de U

P.D.Q. $\mathcal{F}_A \neq \emptyset$

En efecto, $A \in \mathcal{F}_A$:

$$A \subseteq U \mid A \cap A = A \neq \emptyset \quad \square$$

empleado.

empleado

P.D.Q. $U \in \mathcal{F}_A$

En efecto, $U \subseteq U$ y $U \cap A = A \neq \emptyset$. $\square$

P.D.Q. $A \in \mathcal{F}_A$ idem que $\mathcal{F}_A \neq \emptyset$.

— o —

P.D.Q. $A \setminus B \neq \emptyset \wedge B \in \mathcal{F}_A \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}_A$

$$\times A \setminus B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \cap B^c \neq \emptyset$$

$$\times B \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow B \subseteq U \wedge B \cap A \neq \emptyset$$

P.D.Q. $B^c \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow \underbrace{B^c \subseteq U}_{\text{se tiene porq}} \text{ y } \underbrace{B^c \cap A \neq \emptyset}_{\text{se tiene porq } A \setminus B \neq \emptyset}$

$$B \subseteq U \Rightarrow B^c \subseteq U$$

$$\tilde{U} \cap B^c \subseteq U$$

$$C \neq \emptyset$$

$$\subseteq A \neq \emptyset$$

P.D.Q. $B \in \mathcal{F}_A \wedge C \subseteq U \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{F}_A \neq \emptyset$

$$\times B \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow B \subseteq U \wedge B \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow (B \cap A) \cup (C \cap A) \neq \emptyset$$

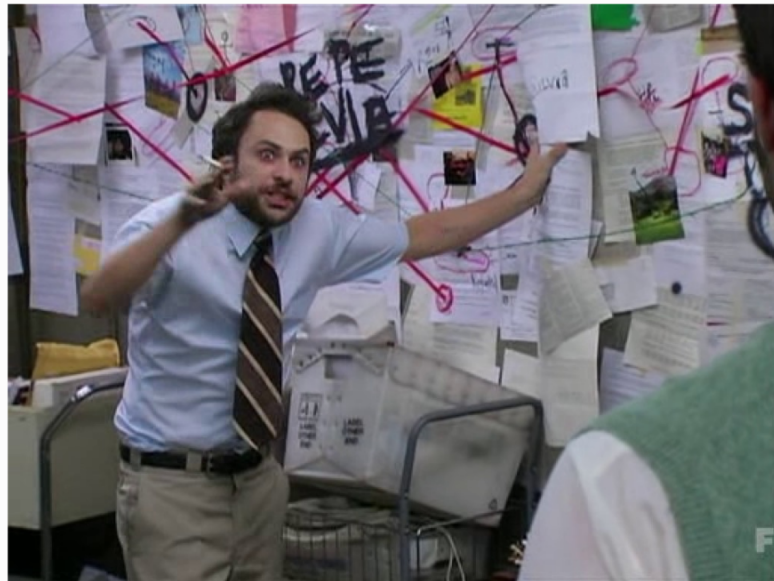
$$\times C \subseteq U$$

P.D.Q. $B \cup C \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow \underbrace{B \cup C \subseteq U \wedge (B \cup C) \cap A \neq \emptyset}_{\substack{B \subseteq U \\ C \subseteq U \Rightarrow B \cup C \subseteq U}}$

$$B \subseteq U \Rightarrow B \cup C \subseteq U$$

Los conjuntos constituyen una de las herramientas esenciales en matemática pues se encargan de agrupar a los elementos que cumplen una determinada propiedad!

Vivimos en un conjunto "o"



Cualquier duda me la pueden comunicar!! ☺

