DESARROLLO PARCIAL AUX 3

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

MA1101-5
2025-1

Profesor: Jorge Aguayo A.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

$\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 1.$

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \\ b_n = (\beta-1)b_{n-1} + \beta b_{n-2} \ (\forall n \geq 2) \end{cases}$$

P.D.Q. $\underbrace{b_n = \dfrac{\beta^n - (-1)^n}{\beta+1}}_{=: Q(n)} \ (\forall n \geq \underbrace{0}_{=: n_0})$ con inducción.

En efecto,

(C.B) Se quiere ver que $b_0 = \dfrac{\beta^0 - (-1)^0}{\beta+1}$.

En efecto, $b_0 = 0 = 1-1 = \dfrac{1-1}{\beta+1} \overset{\text{prop. }()^0}{=} \dfrac{\beta^0 - (-1)^0}{\beta+1}$. Q.E.D. □

También hay que ver que $b_1 = \dfrac{\beta^1 - (-1)^1}{\beta+1}$.

En efecto, $b_1 = 1 = \dfrac{\beta+1}{\beta+1} = \dfrac{\beta^1 - (-1)^1}{\beta+1}$. Q.E.D. □

(H.I.) Se asumirá que $\underbrace{b_n = \dfrac{\beta^n - (-1)^n}{\beta+1}}$ $(\forall n \geq 2) \Leftrightarrow (\forall n \geq 0)$.

más explícitamente: $\forall k \in \mathbb{N}, n_0 \leq k \leq n$
(entender como: "se cumple desde cualquier $n \in \mathbb{N}$ que tomo, hacia atrás, hasta el 1° caso base")

(C.I.) Se quiere ver que:

$$b_{n+1} = \frac{\beta^{n+1} - (-1)^{n+1}}{\beta+1}.$$

En efecto, $b_{n+1} \underset{\text{def. } b_n}{=} (\beta-1)b_n + \beta b_{n-1}$

se ocupa (H.I.) para $k=n$, $k=n-1$
$\Rightarrow$ es inducción FOEERRRTE.

$$\underset{\text{(H.I.)}}{=} (\beta-1)\underbrace{\frac{\beta^n - (-1)^n}{\beta+1}} + \beta \underbrace{\frac{\beta^{n-1} - (-1)^{n-1}}{\beta+1}}$$

$$= \frac{(\beta-1)(\beta^n - (-1)^n) + \beta(\beta^{n-1} - (-1)^{n-1})}{\beta+1}$$

$$= \frac{\beta^{n+1} - \cancel{\beta(-1)^n} - \cancel{\beta^n} + (-1)^n + \cancel{\beta^n} - \cancel{\beta(-1)^{n-1}}}{\beta+1}$$

; $\beta(-1)^n + \beta(-1)^{n-1} = \beta(-1)^{n-1}[(-1)+1] = 0$,,

$$= \frac{\beta^{n+1} + (-1)^n}{\beta+1} \underset{(-1)(-1)=+1}{=} \frac{\beta^{n+1} - (-1)(-1)^n}{\beta+1} = \frac{\beta^{n+1} - (-1)^{n+1}}{\beta+1}$$

; se concluye por transitividad. □

Como se procedió por inducción, se demuestra lo pedido. ☒

Fibonacci:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ser múltiplo de alguien es que me puedo escribir como el producto entre alguien y algún entero.

Ej: 8 es múltiplo de 2 pues $8 = \underbrace{4}_{\text{entero}} \cdot \underbrace{2}_{\text{alguien}}$

P.D.Q. $\underbrace{F_{5n} \text{ es múltiplo de } 5}_{Q(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow n_0 = 0$

Como es una propiedad iterada en $\mathbb{N}$, se demostrará por inducción.

En efecto,

C.B. Se quiere ver que F_{5n_0} es múltiplo de 5, para $n_0 = 0$.

En efecto,

Notar que $F_{5\cdot 0} = F_0 \underset{\text{def. } F}{=} 0 = 0 \cdot 5 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$ t.q. $F_{5n_0} = 5m$, con $m = 0$. Q.E.D. □

H.I. Supóngase que $(\forall n \geq 1)$: F_{5n} es múltiplo de 5.

$\Longleftrightarrow F_{5n} = 5m$, algún $m \in \mathbb{Z}$, para todo $n \geq \underset{1+n_0}{1}$, $n \in \mathbb{N}$

P.D.Q. Se quiere ver que $F_{5(n+1)}$ es múltiplo de 5

$\Longleftrightarrow F_{5(n+1)} = 5l$, algún $l \in \mathbb{Z}$.

En efecto,

$$F_{5(n+1)} = F_{5n+5} \underset{\text{def. } F}{=} F_{5n+4} + F_{5n+3} \quad \text{... def. } F_n$$

$$= (F_{5n+3} + F_{5n+2}) + F_{5n+3} = 2F_{5n+3} + F_{5n+2}$$

$$\underset{\text{def. } F}{=} 2(F_{5n+2} + F_{5n+1}) + F_{5n+1} + F_{5n}$$

$$= 2F_{5n+2} + 3F_{5n+1} + F_{5n}$$

$$\underset{\text{def. } F}{=} 2(F_{5n+1} + F_{5n}) + 3F_{5n+1} + F_{5n}$$

$$= 5F_{5n+1} + 3F_{5n} \underset{\text{H.I.}}{=} 5F_{5n+1} + 3(5m)$$

$$= 5(\underbrace{F_{n+1} + 3m}_{\in \mathbb{Z}}); \text{ luego } q := F_{n+1} + 3m. \text{ Q.E.D.} \ \square$$

$\in \mathbb{Z}$ pues $F_{n+1} \in \mathbb{N}$, $3, m \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Intuición: No hay mucha info. que sacar, salvo desde la definición de F.

Por lo anterior, se concluye que se tiene la proposición. ■

$(a_n)_{n\geq 1}$ secuencia de números. ← si fuera $n\geq 2$, en el caso de $n=2$, aparece $a_{n-2}=a_0$ el cual is not defined.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = 3(a_{n-1}+a_{n-2})+1 \quad \forall n\geq 3 \end{cases}$$

implícito ↓

→ es lo mismo que ver que se puede escribir como múltiplo de 32, como en el ejercicio anterior.

P.D.Q. $a_{3n} + a_{3n+1}$ es divisible por 32 ← implícitamente es $\forall n \geq 1$. (si dijera $n=0 \Rightarrow a_{3n}=a_0$ y eso no está definido)

(a) P.D.Q. $a_{3n+2}-1$ es divisible por 2

Por Inducción, se verá que $a_{3n+2}-1 = 2m$; algún $m\in\mathbb{Z}$, $\forall n\geq 1$.

C.B. Se verá que $a_{3n_0+2}-1 = 2m$, algún $m\in\mathbb{Z}$.

En efecto, $a_{3\cdot 1+2}-1 = a_5 - 1$

$= 3(a_4+a_3)\cancel{+1}\cancel{-1} \underset{\text{def. } a}{=} 3(3(a_3+a_2)+1)+3(3(a_2+a_1)+1)$

$= 9a_3 + 9a_2 + 3 + 9a_2 + 9a_1 + 3$

$= 9(3(a_2+a_1)+1) + 18a_2 + 9a_1 + 6$

$= 27a_2 + 27a_1 + 9 + 18a_2 + 9a_1 + 6$

$= 45a_2 + 36a_1 + 15$; $a_2 = 1 = a_1$

$= 96 = \underbrace{48}_{=:m\in\mathbb{Z}}\cdot 2$. □

H.I. Supóngase que $a_{3n+2}-1 = 2m$ algún $m\in\mathbb{Z}$, $\forall n\geq 2$

P.D.Q. Se quiere ver que $a_{3(n+1)+2}-1 = 2l$, algún $l\in\mathbb{Z}$.

En efecto, $a_{3(n+1)+2}-1 = a_{3n+5}-1 = 3(a_{3n+4}+a_{3n+3})\cancel{+1}\cancel{-1}$

$= 3(3(a_{3n+3}+a_{3n+2})+1) + 3a_{3n+3}$

$= 12a_{3n+3} + 3a_{3n+2} + 3 = 6-3$

$= 12a_{3n+3} + 3(a_{3n+2}-1) + 6$

$= 12a_{3n+3} + 3\cdot 2m + 6$, algún $m\in\mathbb{Z}$

$= 2\underbrace{(6a_{3n+3}+3m+6)}_{=:l\in\mathbb{Z}}$ $\therefore a_{3(n+1)+2}-1$ es divisible por 2 □

Se concluye que se tiene la proposición a demostrar. □

(b) P.D.Q $3a_{3n+1}+5$ divisible por 8 $\forall n\geq 1$

En efecto, por inducción:

C.B. Se verá para $n_0=1$.

En efecto, $3a_{3n_0+1}+5 = 3a_{3+1}+5$

$= 3a_4+5 = 3(3(a_3+a_2)+1)+5 = 9a_3+9a_2+8$

$= 9(3(a_2+a_1)+1)+9a_2+8 = 36a_2+27a_1+17$; $a_2=1=a_1$

$= 63+17 = 80 = 2\cdot \underbrace{40}_{\in\mathbb{Z}}$. Q.E.D. $\square$

H.I. Supóngase que $3a_{3n+1}+5=2m$, algún $m\in\mathbb{Z}$, para $n\geq 2$.

P.D.Q. Se quiere ver que $3a_{3(n+1)+1}+5=2l$, algún $l\in\mathbb{Z}$.

En efecto,

$3a_{3n+4}+5 = 3(3(a_{3n+3}+a_{3n+2})+1)+5 = 9a_{3n+3}+9a_{3n+2}+8$

$= 9(3(a_{3n+2}+a_{3n+1})+1)+9a_{3n+2}+8$

$= 36a_{3n+2}+27a_{3n+1}+17 =$

$= 36a_{3n+2}+9(3a_{3n+1}+5)-45+17$

$= 36a_{3n+2}+9(3a_{3n+1}+5)-28$

$= 36a_{3n+2}+9\cdot 2m-28$, $m\in\mathbb{Z}$

H.I.

$= 2\underbrace{(18a_{3n+2}+9m-28)}_{\in\mathbb{Z}}$ pues $18, 9, m, -28, a_{3n+2}\in\mathbb{Z}$! Q.E.D. $\square$

Luego, se concluye que la proposición es cierta. $\blacksquare$

(c) Conclusión. P.D.Q. $a_{3n}+a_{3n+1}$ es divisible por 32 $\forall n\geq 1$

Se procederá por inducción, utilizando los resultados de las partes anteriores: intuición ; escribirlos convenientemente!

(i) $a_{3n+2}-1 = 2m$, algún $m\in\mathbb{Z}$, $\forall n\geq 1$

(ii) $3a_{3n+1}+5 = 8l$, algún $l\in\mathbb{Z}$, $\forall n\geq 1$

En efecto,

(C.B.) Se quiere ver que $a_{3n_0}+a_{3n_0+1} = 32q$, algún $q\in\mathbb{Z}$, con $n_0=1$.

En efecto,

$$a_{3\cdot 1}+a_{3\cdot 1+1} = a_3+a_4 = a_3+3(a_3+a_2)+1 = 4a_3+3a_2+1$$

$$= 4(3(a_2+a_1)+1)+3a_2+1 = 15a_2+12a_1+5 \ ; \ a_2=1=a_1$$

$$= 32 = 32\cdot\underbrace{1}_{\in\mathbb{Z}} . \quad \text{Q.E.D.} \ \square$$

(H.I.) Supóngase que $a_{3n}+a_{3n+1}=32q$, algún $q\in\mathbb{Z}$, para $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

(P.D.Q.) Se verá que $a_{3(n+1)}+a_{3(n+1)+1} = 32\tilde{q}$, algún $\tilde{q}\in\mathbb{Z}$.

En efecto,

$$a_{3n+3}+a_{3n+4} = a_{3n+3}+3(a_{3n+3}+a_{3n+2})+1 \quad \ldots \text{def. } a_n$$

$$= 4a_{3n+3}+3a_{3n+2}+1$$

$$= 4(3(a_{3n+2}+a_{3n+1})+1)+3a_{3n+2}+1 \quad \ldots \text{def. } a_n$$

$$= 15a_{3n+2}+12a_{3n+1}+5$$

$$= 15(a_{3n+2}-1)\cancel{+15}+4(3a_{3n+1}+5)\cancel{-20}\cancel{+5}$$

$$= 15\cdot 2m+4\cdot 8l, \text{ algún } m,l\in\mathbb{Z} \quad \ldots$$ no es múltiplo de 32! Se requiere otra Fact.

$$\overset{(i),(ii)}{=} 15(3(a_{3n+1}+a_{3n})+1)+12a_{3n+1}+5$$

$$= 45\cdot 32q+20+12a_{3n+1} = 45\cdot 32q+4(3a_{3n+1}+5)\cancel{-20}\cancel{+20}, \ q\in\mathbb{Z}$$

$$\underset{(ii)}{\overset{H.I.}{=}} 45\cdot 32q+\underbrace{4\cdot 8l}_{=32}, (q,l\in\mathbb{Z}) = 32(\underbrace{45q+l}_{=:\tilde{q}\in\mathbb{Z}}) . \quad \text{Q.E.D.} \ \square$$

Se concluye la proposición!

En el fondo, hay que demostrar que ¿Cómo más pregunta de aviso? Contexto

$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4000): \quad n = 2000p + 5000\ell$, algún $p, \ell \in \mathbb{Z}_0^+$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}$, n múltiplo de 1000, $n \geq 4000): \quad 1000\tilde{n} = 2000p + 5000\ell$, algún $p, \ell \in \mathbb{Z}_0^+$

$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4): \quad \Leftrightarrow \tilde{n} = 2p + 5\ell$, algún $p, \ell \in \mathbb{Z}_0^+$

En efecto: Por inducción,

C.B. Se verá que para $n_0 = 4$, $n_0 = 2p + 5\ell$, algún $p, \ell \in \mathbb{Z}$

En efecto, $4 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot \underbrace{2}_{=:p} + 5 \cdot \underbrace{0}_{=:\ell}$. □

H.I. Supongamos que $n = 2p + 5\ell$, algún $p, \ell \in \mathbb{N}$, para todo $n \geq 5$.

P.D.Q. Se quiere ver que $n+1 = 2\tilde{p} + 5\tilde{\ell}$, algún $\tilde{p}, \tilde{\ell} \in \mathbb{N}$.

En efecto,

$$\begin{aligned} n+1 &= n + (5-4) \\ &= n + (5 \cdot 1 - 2 \cdot 2) \\ &\overset{H.I.}{=} 2\tilde{p} + 5\tilde{\ell} + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ &= 2(\tilde{p} - 2) + 5(\tilde{\ell} + 1) \in \mathbb{N} \text{ si } \tilde{\ell} \geq 0, \tilde{\ell} \in \mathbb{N} \\ &\qquad \tilde{p} \geq 2, \tilde{p} \in \mathbb{N}! \end{aligned}$$

No hay que analizar más casos pues por restricciones, $p \geq 2$ (si $p < 2$ entonces no se podría obtener 4.000.).

En virtud de lo anterior, se demuestra la proposición.

Se concluye que es verdad, argumentando por inducción. ■

Inducción (débil):

Ver que $Q(n)$ $(\forall n \geq n_0)$

$$\iff \underbrace{Q(n_0)}_{C.B} \wedge \underbrace{\left(\left(\forall \underbrace{n > n_0}_{\iff n \geq n_0+1} \right) : Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \right)}_{H.I}$$

$+\ n \geq n_0$

$\Rightarrow n \geq n_0 + 1$

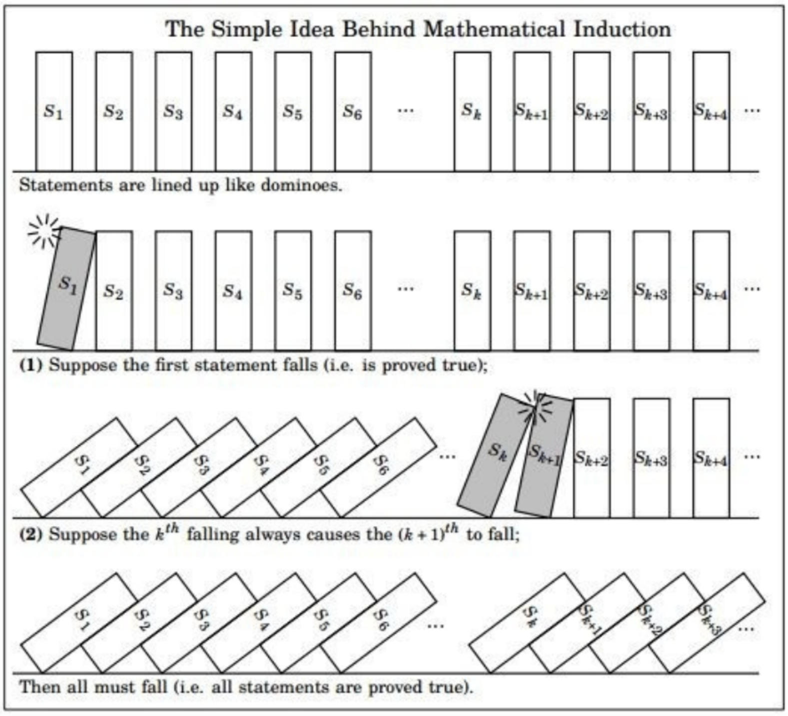
Inducción (fuerte):

Ver que $Q(n)$ $(\forall n \geq n_0)$

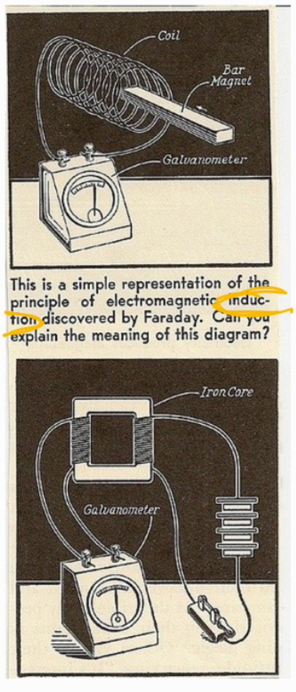
$$\iff \underbrace{Q(n_0^1) \wedge Q(n_0^2) \wedge \dots \wedge Q(n_0^k)}_{\text{tantos casos base como raíces haya}} \wedge \left((\forall n > n_0) : Q(n) \wedge Q(n-1) \wedge \dots \wedge Q(0) \Rightarrow Q(n+1) \right)$$

Inducción aparece para quedarse.

Una herramienta que ocuparán a menudo para distintos argumentos matemáticos!!



otro principio de inducción :o



Ri

Airiel