Auxiliar 4

Conjuntos

Profesor: Jorge Aguayo A.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 14 de abril de 2025

P1. [Visualmente]
Sean A, B conjuntos. Demuestre que se tienen las siguientes igualdades:

a) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

b) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$

P2. [Restando]
Sean A, B, C, D subconjuntos del conjunto de referencia U. Demuestre que:

a) $(B \setminus A) \subseteq C \iff C^c \subseteq (B^c \cup A)$

b) $(B \setminus A) \subseteq C \implies (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup A$

c) $A \cup B = A \cap C \implies B \subseteq A \wedge A \subseteq C$

P3. [Condiciones para contención]
Sean A, B, W subconjuntos de un conjunto de referencia Z. Muestre que:

$$(A \cap W) \subseteq (B \cap W) \wedge (A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c) \implies A \subseteq B$$

P4. [Aplicando]

a) Considere los conjuntos A, B, C, D tales que $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ y muestre que $(A \cap B) \subseteq (C \cap D)$.

b) Sean X, C, D conjuntos. Demuestre que $X \subseteq C \wedge X \subseteq D \iff X \subseteq (C \cap D)$.

P5. [Condiciones para igualdad]
Sean A, B, C conjuntos en Z. Pruebe que la igualdad $A \cup B = A \cap C$ es equivalente a que $B \subseteq A \wedge A \subseteq C$.

P6. [Simetría]
Sean A, B, C conjuntos. Pruebe que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A \Delta B = A \Delta C \implies B = C$ **b)** $A \Delta B = C \implies B = A \Delta C$ **c)** $A \Delta B \Delta C = A \cup B \cup C \iff A \cap B = \emptyset$

P7. [Inmersión]
Sea U conjunto universo y $\mathcal{G} \subseteq U$ la familia de conjuntos no vacía tal que $\mathcal{G} = \{W \subseteq U \mid W \neq \emptyset\}$. Para $A \in \mathcal{G}$ se define la familia de subconjuntos de U por $\mathcal{F}_A = \{B \subseteq U \mid B \cap A \neq \emptyset\}$. Sea $A \in \mathcal{G}$. Demuestre que:

a) $\mathcal{F}_A \neq \emptyset$, $U \in \mathcal{F}_A$ y que $A \in \mathcal{F}_A$.

b) $A \setminus B \neq \emptyset \wedge B \in \mathcal{F}_A \implies B^c \in \mathcal{F}_A$.

c) $B \in \mathcal{F}_A \wedge C \in \mathcal{G} \implies (B \cup C) \in \mathcal{F}_A$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Conjunto y elementos]**: Un **conjunto** es una colección de cosas, sus **elementos**. Se caracteriza por:
  - **Comprensión**, al exhibir una propiedad que cumplen los elementos del conjunto.
    Ejemplo: $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq m \leq 5\}$.
  - **Extensión**, al escribir explícitamente todos los elementos del conjunto.
    Siguiendo el anterior ejemplo, $S = \{2, 3, 4, 5\}$.
- **[Conjuntos elementales]**: Corresponden a los conjuntos con los cuales siempre se va a trabajar.
  - **[Conjunto de referencia]**: Se denotará por Z y corresponde al conjunto, del cual se asume su existencia, que contiene a todos los elementos con los cuales se va a trabajar, es decir:
    $$(\forall\, x \in Z) : x \in Z, \text{ es verdadera}$$
  - **[Conjunto vacío]**: Siempre se denota por $\emptyset$; es un conjunto que no contiene elementos, es decir:
    $$(\forall\, x \in Z) : x \in \emptyset, \text{ es falsa}$$
- **[Relaciones entre conjuntos]**: En lo que sigue se trabajará con A, B, C, D conjuntos en Z.
  - **[Igualdad]**: Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos:
    $$A = B \iff (\forall\, x \in Z) : x \in A \iff x \in B$$
    - Es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
  - **[Inclusión]**: Un conjunto B contiene a otro conjunto A (A es contenido por B), si todos los elementos del contenido están en el que los contiene:
    $$A \subseteq B \iff (\forall\, x \in Z) : x \in A \implies x \in B$$
    - Es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- **[Álgebra de conjuntos]**:
  - **[Unión]**: La unión entre dos conjuntos reúne los elementos que están en al menos uno de ellos:
    $$(\forall\, x \in Z) : x \in A \cup B \iff x \in A \lor x \in B$$
  - **[Intersección]**: La intersección entre dos conjuntos reúne los elementos que están en ambos:
    $$(\forall\, x \in Z) : x \in A \cap B \iff x \in A \land x \in B$$
    - $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$
    - $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$
    - $A \cup Z = Z$ y $A \cap Z = A$
    - $\cup$ y $\cap$ conmutan y asocian, cada una.
    - $\cup$ distribuye c/r a $\cap$ y viceversa.
    - Sea I conjunto de índices y, para todo $i \in I$ sea $A_i \subseteq Z$ un conjunto. Se definen la **unión e intersección de la colección** A_i por:
    $$(\forall\, x \in Z) : x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists\, i \in I) : x \in A_i$$
    $$(\forall\, x \in Z) : x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall\, i \in I) : x \in A_i$$
  - **[Conjunto complemento]**: El complemento de un conjunto corresponde al conjunto de elementos que no están en él:
    $$(\forall\, x \in Z) : x \in A^c \iff x \notin A$$
    - $\emptyset^c = Z \iff Z^c = \emptyset$
    - $(A^c)^c = A$
    - $(A \cap A^c = \emptyset) \land (A \cup A^c = Z)$
    - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
  - **[Diferencia]**: La diferencia entre dos conjuntos corresponde al conjunto de elementos están en uno pero no en el otro:
    $$(\forall\, x \in Z) : x \in A \setminus B \iff x \in A \land x \notin B$$
  - **[Diferencia simétrica]**: La diferencia simétrica entre dos conjuntos corresponde al conjunto de elementos que están exactamente en uno de ellos:
    $$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
- **[Propiedades de conjuntos]**:
  - $\emptyset \subseteq A \subseteq Z$
  - La inclusión se preserva para uniones e intersecciones: $A \subseteq B \land C \subseteq D \implies (A \cup B \subseteq C \cup D) \land (A \cap B \subseteq C \cap D)$
  - $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ (lo mismo aplica para B).
  - $A \subseteq B \implies (A \cup B = B) \land (A \cap B = A)$
  - Se cumplen las caracterizaciones: $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c \iff A \cap B^c = \emptyset \iff A^c \cup B = Z$