Auxiliar 3

Principio de inducción matemática

Profesor: Jorge Aguayo A.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 7 de abril de 2025

P1. [Primeros pasos]
Demuestre que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, a partir del 1, se tiene que $5^n \geq 2^n + 3^n$.

P2. [Reescritura]
Pruebe que todo número natural $n \geq 8$ se puede escribir de la forma $n = 3p + 5q$, donde $p, q \in \mathbb{N}$.

P3. [¿Sumatoria?]
Demuestre, utilizando inducción, la siguiente proposición:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1} \quad (\forall\, n \geq 1)$$

P4. [Secuencialmente]
Considere una secuencia de números $x_0, x_1, \ldots$ que, para $a \in \mathbb{R}$ dado, satisface lo siguiente:

$$(\forall\, n \geq 0) : x_{n+3} = -x_n + a$$

Pruebe que $x_{6n} = x_0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$.

P5. [etnemlaicneuceS]
Sea $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta \neq 1$. Considere la recurrencia dada por $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ y $b_n = (\beta - 1)\, b_{n-1} + \beta b_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Demuestre que para todo $n \geq 0$ se tiene que $b_n = \dfrac{\beta^n - (-1)^n}{\beta + 1}$.

P6. [Áureo]
Los números de Fibonacci se definen recursivamente de la siguiente forma:

$$\begin{cases} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \end{cases}$$

Demuestre que $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ se tiene que F_{5n} es múltiplo de 5.

P7. [Divisibilidad]
Considere la secuencia de números $(a_n)_{n \geq 1}$ definida por la recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= 3\,(a_{n-1} + a_{n-2}) + 1 \end{cases}$$

El objetivo de este problema es demostrar que $a_{3n} + a_{3n+1}$ es divisible por 32. Para esto, se propone el siguiente esquema: **a)** Pruebe que $a_{3n+2} - 1$ es divisible por 2. **b)** Pruebe que $3a_{3n+1} + 5$ es divisible por 8. **c)** Concluya.

P8. [Cajero automático]

¿Ha escuchado hablar de los cajeros automáticos? ¿Es verdad que un cajero automático podría entregar cualquier cantidad de dinero en múltiplos de \$1000, desde los \$4000 pesos, utilizando solo billetes de \$2000 y \$5000? Argumente con matemática.

Principales definiciones y propiedades

- **[Principio de inducción (fuerte)]**: Si $n_0 \in \mathbb{N}$ y $Q(n)$ es un predicado en el conjunto de referencia de los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq n_0$, entonces demostrar $(\forall\, n \geq n_0) : Q(n)$ es equivalente a que se cumpla el caso base y la hipótesis inductiva simultáneamente, con:

  - Caso base: $Q(n_0)$.
  - Hipótesis inductiva: $(\forall\, n \geq n_0) : Q(n_0) \wedge Q(n_0 + 1) \wedge \cdots \wedge Q(n-1) \implies Q(n)$.

  Cuando se considera solamente $Q(n-1)$ verdadera en la hipótesis inductiva, al ser una condición más débil, se denomina **principio de inducción débil** (solo es un caso particular del principio de inducción).

- **[Recurrencia]**: Es una ecuación o procedimiento que define una secuencia de términos (u objetos matemáticos) en función de términos anteriores; también se denomina una definición recursiva.

- **[Fórmulas de recurrencia]**: Son reglas del tipo:

$$x_n = \begin{cases} a, & \text{si } n = m, \\ f(n, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), & \text{si } n \in \mathbb{N},\ n > m \end{cases}$$

  Donde a se denomina base de la recurrencia y f corresponde a alguna expresión aritmética o procedimiento.

- **[Algunas recurrencias conocidas]**:
  - **[Progresión aritmética]**: Crea términos **sumando** un valor fijo. Para $\overline{x}, a \in \mathbb{R}$, $x_0, x_1, \ldots$ es una progresión aritmética de **paso** a si $a_0 = \overline{x}$ y $a_n = a_{n-1} + a\ \forall\, n \geq 1$.
  - **[Progresión geométrica]**: Crea términos **ponderando** por un valor fijo. Para $\overline{x}, \alpha \in \mathbb{R}$, $x_0, x_1, \ldots$ es una progresión geométrica de **razón** α si $a_0 = \overline{x}$ y $a_n = \alpha \cdot a_{n-1}\ \forall\, n \geq 1$.
  - **[Factorial]**: Son la multiplicación de todos los números naturales hasta el instanciado:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$