DESARROLLO AUX 2

CUANTIFICADORES Y APLICACIONES

MA1101-5

2025-1

Profesor: Jorge Aguayo A.

Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P.D.Q. $\underbrace{\{(\exists x\in \mathbb{Z}): P(x) \Rightarrow (\forall x\in\mathbb{Z}): P(x)\}}_{\circledast} \Rightarrow \underbrace{P(x)\Leftrightarrow V \text{ ó } P(x)\Leftrightarrow F}$

"tallarines" (prebarlos)

esto no es "obvio" porque puede ser V o F para distintos x (def: predicado).

En efecto,

Se sabe que $(\exists x\in\mathbb{Z}): P(x) \Rightarrow (\forall x\in\mathbb{Z}): P(x)$.

Esto quiere decir "si se cumple para alguno, se cumple para todos".

Se quiere ver que el valor de verdad de P es siempre V o siempre Falso.

Por caracterización del $\Rightarrow$: $\overline{(\exists x\in\mathbb{Z}): P(x)} \vee (\forall x\in\mathbb{Z}): P(x)$

$$\Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{Z}): \overline{P(x)} \vee (\forall x\in\mathbb{Z}): P(x)$$

$\overline{\exists} = \forall$

$$\Rightarrow (\forall x\in\mathbb{Z}): (\overline{P(x)} \vee P(x))$$

O sea que para todo x, $P(x)$ es Falso ($\overline{P(x)}$) o $P(x)$ es verdadero ($P(x)$). $\boxtimes$

— o —

Otra forma:

Hacia contradicción,

Se tiene que $(\exists x\in\mathbb{Z}): P(x) \Rightarrow (\forall x\in\mathbb{Z}): P(x)$.

Supóngase que $P(x)\Leftrightarrow V$ ó $P(x)\Leftrightarrow F$ no ocurre, o sea que $P(x)$ no tiene un valor veritativo constante para todos los $x\in\mathbb{Z}$.

Entonces, $(\exists a\in\mathbb{Z}): P(a)$ es V y $(\exists b\in\mathbb{Z}): P(b)$ es F. $(a\neq b)$

Pero por Hipótesis, si $(\exists a\in\mathbb{Z}): P(a) \Rightarrow (\forall a\in\mathbb{Z}): P(a)$

contraejemplo

pues $(\exists b\in\mathbb{Z}): P(b)$ es F

Luego, como se redujo a un absurdo y se procedió por contradicción, el supuesto es Falso y su negación es Verdadero. Sigue que se concluye que $\circledast$ asegura que P sea siempre V o siempre F. $\boxtimes$

P función proposicional

P.D.Q. (i) $(\forall x)(\exists y):(P(x) \Rightarrow P(y))$ } (ii) $\Rightarrow$ (i) {¿y?

(ii) $(\exists y)(\forall x):(P(x) \Rightarrow P(y))$

(i) "para todo x debo hallar y que haga que $P(x) \Rightarrow P(y)$ sea V"

Sea $x \in \mathbb{Z}$ arb. $\Rightarrow P(x) \Leftrightarrow V$ ó $P(x) \Leftrightarrow F$.

Sea x arbitrario t.q. $P(x) \Leftrightarrow V$

Se tomará y t.q. $\boxed{x = y}$ → depende de x

Luego, como $P(x) \Leftrightarrow V$ y $P(y) \Leftrightarrow V$, entonces $\underset{\text{def.} \Rightarrow}{\Rightarrow}$ $P(x) \Rightarrow P(y)$ //

Sea x arbitrario t.q. $P(x) \Leftrightarrow F$.

Se tomará y t.q. $\boxed{y \text{ en el conjunto de referencia}}$.

Luego, como $P(x) \Leftrightarrow F$, independiente del valor veritativo de $P(y)$, en virtud de la def. de $\Rightarrow$, se tiene que $P(x) \Rightarrow P(y)$ //

Con lo anterior, se demuestran ambos casos, concluyendo lo pedido. ☒

(ii) "debo hallar y t.q. para cualquier x se tenga $P(x) \Rightarrow P(y)$ sea V"

Se tomará y t.q. $\boxed{P(y) \Leftrightarrow V.}$ → es independiente de x

Sea x arbitrario $\Rightarrow P(x) \Leftrightarrow V$ ó $P(x) \Leftrightarrow F$.

Si $P(x) \Leftrightarrow V$, entonces como se eligió $P(y) \Leftrightarrow V$, por def. de $\Rightarrow$, se tiene que $P(x) \Rightarrow P(y)$ es V. //

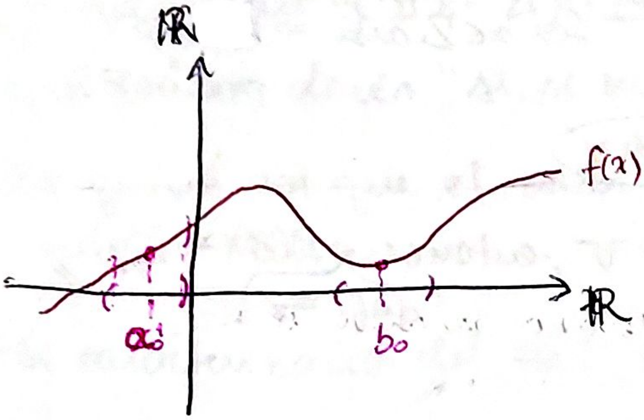
Si $P(x) \Leftrightarrow F$, entonces por def. de $\Rightarrow$, se tiene $P(x) \Rightarrow P(y)$ es V.

Con lo anterior, se demuestra lo pedido. ☒

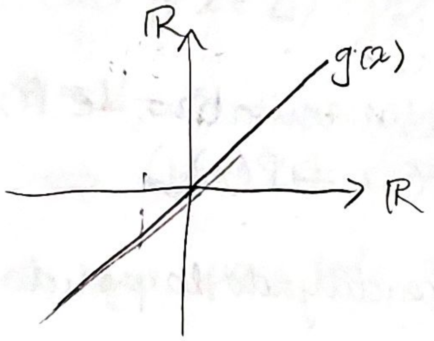
$\mathbb{R} \equiv$ conjunto nº reales ; f función

$q \iff (\exists x_0 \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)) : f(x_0) \leq f(x))$

Decidir si q es V ó F para $g(x) = x$
$h(x) = x^2$



La proposición dice que si existe una preimagen t.q. al fijar una tolerancia para un intervalo alrededor de dicha preimagen, sea la imagen menor o mínima de ese conjunto.



La intuición dice que es F.

Supongamos que es V. y veamos que no puede ocurrir.

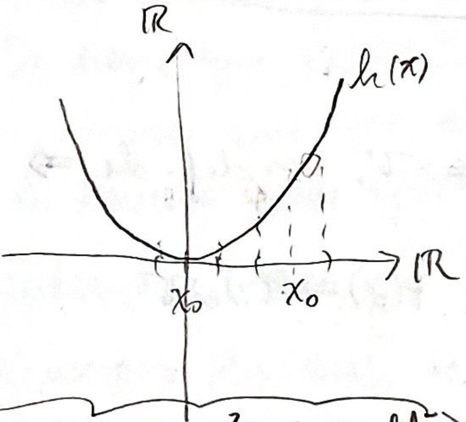
Se toma $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ t.q. $g(x_0) \leq g(x)$ $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

o sea $x_0 \leq x$ $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ⚡

pues $x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

y $\underbrace{x_0}_{g(x_0)} \leq \underbrace{x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon}_{g(x_0-\frac{1}{2}\varepsilon)} \iff 0 \leq \underbrace{-\frac{1}{2}\varepsilon}_{\ominus} \implies F.$

Luego, $q \iff F$ para $f = g$.



La intuición dice que es V.

Supongamos que es F y veamos que no puede ocurrir.

$\{(\exists x_0 \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)) : h(x_0) \leq h(x) \iff F\}$

$\iff \{(\forall x_0 \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)) : h(x_0) > h(x) \iff V\}$

Luego, se tiene que para $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario (s.p.d.g. $x_0 > 0$) y para cualquier tolerancia, siempre $x_0^2 > x^2$ con x en una vecindad.

No obstante $x = x_0 + \frac{1}{2}\varepsilon \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ $\qquad x = x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon$

Otra forma: $x^2 \geq 0$ por def.

$\iff h(x) \geq h(x_0)$ con $x_0 = 0$

Luego $\exists \varepsilon > 0$ (cualquiera), y se tiene lo pedido.

$0 > (\frac{1}{2}\varepsilon)^2 \iff$ ⚡ $\varepsilon > 0$

$\implies x_0^2 > x_0^2 + x_0\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2$

$\iff 0 > x_0 + \frac{1}{4}\varepsilon$; $\varepsilon = 4x_0$

$\iff 0 > 2x_0$ ⚡ $x_0 \geq 0$.

$x_0^2 > x_0^2 - x_0\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2$

$\iff 0 > -x_0 + \frac{1}{4}\varepsilon$; $\varepsilon = 4x_0$

$\iff 0 > -x_0 + x_0$

$\iff 0 > 0$ ⚡ $0 = 0$.

∎

$\mathbb{R} \equiv$ conjunto números reales ; $G = \{-1, 0, 1\}$

(F) $P(x,y) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x \leq y$

(V) $Q(x,y) \Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x \leq y$

(F) $R(x,y) \Leftrightarrow (\forall x \in G)(\forall y \in G) : x + y \leq 1$

(V) $S(x,y) \Leftrightarrow (\forall x \in G)(\exists y \in G) : x^2 \leq y$

$$\boxed{(\forall x \in Z) : P(x) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} (\exists x \in Z) : \overline{P(x)}}$$

Indicar valor de verdad y escribir negaciones

P| "existe número real que no supera a ningún otro"
"existe número real que es menor o igual a cualquier otro"

La intuición dice que es F. (pues $\mathbb{R}$ es no acotado)
Hacia contradicción, supóngase que es V y véase que no puede ocurrir.
Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $x \leq y$ para todo $y \Rightarrow \mathbb{R}$ sería acotado por debajo
sin embargo, $\forall y \in \mathbb{R}$, existe $y - \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, i.e. se puede hallar uno menor. Q.E.D. ■

Q| "para cualquier nº real, puedo hallar alguien menor (o igual)"
La intuición dice que es V, y se probó recién.

$\overline{P}(x,y) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x > y$ //

$\overline{Q}(x,y) \Leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x > y$ //

R| "si sumo cualesquiera 2 elementos de G, es a lo más 1"

La intuición dice que es F.
En efecto, basta encontrar un contraejemplo: $x = 1 \in G$, $y = 1 \in G$ $\Rightarrow x + y = 2 \not\leq 1$.

Q.E.D. ■

S| "el cuadrado de alguien de G es t.q. puedo hallar alguien mayor en G"
Notar que $G^2 = \{2\}$ o sea $(\forall g \in G), g^2 \leq 1$ pues $g^2 = 1$ ó $g^2 = 0$. → V
Luego, efectivamente, para $x \in G$ arbitrario, $x^2 \leq 1 =: y \in G$. Q.E.D. ■

$\overline{R}(x,y) \Leftrightarrow (\exists x \in G)(\exists y \in G) : x + y > 1$ //

$\overline{S}(x,y) \Leftrightarrow (\exists x \in G)(\forall y \in G) : x^2 > y$ //

$\mathcal{H}$ = conjunto de personas en fila para comprar almuerzo.

$\phi(x,y)$: "persona y está más atrás que persona x en la fila"
"persona x está más adelante que persona y en la fila"

almuerzo
↓
ϕ $\boxed{x \quad y}$

Sea $p \in \mathcal{H}$ fijo

(i) $(\forall \cancel{x} \in \mathcal{H}): \phi(p,x) \vee x = p$

(ii) $(\forall \cancel{x} \in \mathcal{H}): \phi(x,p) \vee x = p$

(iii) $(\exists! \, x \in \mathcal{H}): \phi(x,p) \veebar \phi(p,x)$

"ó exluyente"
$r \veebar s \Leftrightarrow (r \vee s) \wedge \overline{(r \wedge s)}$

Determinar el valor de verdad.

(i): Sea $x \in \mathcal{H}$. ↗ p está más adelante que toda persona

$\phi(p,x)$: "p está más adelante que x"

$x = p$: "todas las personas $\mathcal{H}$ son p"

→ p es el único

} p está 1° en la fila.

(ii): Sea $x \in \mathcal{H}$. ↗ p está más atrás que toda persona

$\phi(x,p)$: "x está más adelante que p"

$x = p$: "todas las personas $\mathcal{H}$ son p"

→ p es el único

} p está último en la fila.

(iii): Sea $x \in \mathcal{H}$ único t.q.:

$\phi(x,p)$: "x está más adelante que p"

$\phi(p,x)$: "p está más adelante que x"

} p es 1° o 2°.

$\boxed{x \quad p}$

$\boxed{p \quad x}$

"solo hay 2 opciones"

$\phi(\cancel{q}\,p)$ es V

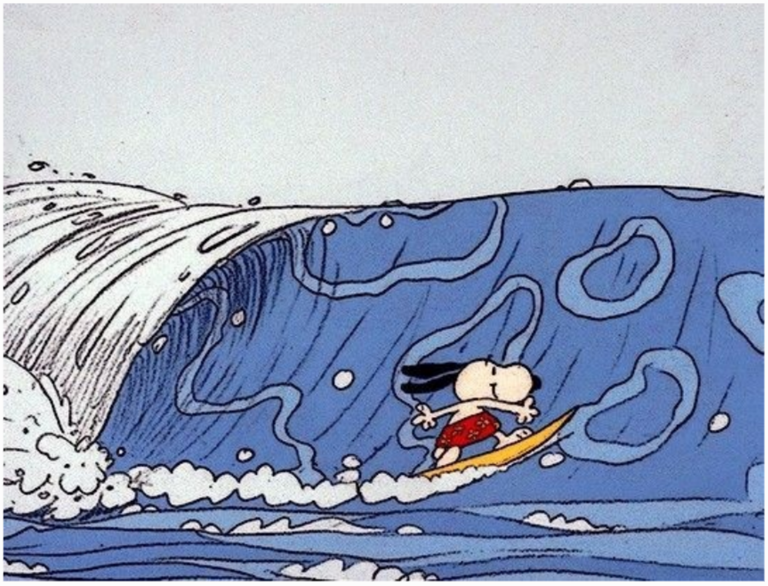
$\boxed{x \quad q \quad p}$: $\boxed{\phi(x,p) \text{ es } V}$

pero $\phi(x,q)$ también es V

$\boxed{p \quad q \quad x}$: $\boxed{\phi(p,x) \text{ es } V}$

pero $\phi(p,q)$ también es V

no hay unicidad



Surfeando a través de los ejercicios :)

Si tienen dudas pueden comentármelas!!

Disfruten su receso!

NIEBLA NIEBLA

NIEBLA NIEBLA