

Auxiliar 1

Tautologías y técnicas de demostración

Profesor: Jorge Aguayo A.

Auxiliar: Bianca Zamora Araya

Fecha: 17 de marzo de 2025

P1. [Simbolismos]

Sean p , q y r proposiciones lógicas. Muestre simbólicamente que la siguiente proposición es una tautología:

$$(p \implies r) \implies (p \wedge q \implies r)$$

P2. [Directo al grano]

Sean p , q y r proposiciones. Demuestre, por método directo, la siguiente proposición:

$$(p \implies \bar{q}) \wedge [(\bar{r} \vee q) \wedge r] \implies \bar{p}$$

P3. [Es recíproco]

Sean p , q , r y s proposiciones lógicas. Demuestre, por contrarrecíproca, la siguiente proposición:

$$(p \implies q) \wedge (\bar{s} \implies \bar{r}) \implies \bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)$$

P4. [Llevando la contraria]

Sean p , q y r proposiciones. Demuestre, por contradicción, que la siguiente proposición es tautología:

$$(p \implies \bar{q}) \wedge (r \implies q) \implies (p \implies \bar{r})$$

P5. [Explorando ando]

Determine el valor de verdad de las proposiciones p_1 , p_2 , p_3 y p_4 sabiendo que q es verdadera:

$$q \iff \left\{ [p_4 \implies (p_3 \vee \bar{p}_3)] \implies \left[\overline{(p_1 \implies p_2)} \wedge p_4 \wedge \bar{p}_3 \right] \right\}$$

P6. [Construcción]

Sean p , q , r y s proposiciones lógicas, y s la proposición compuesta a partir de ellas, cuya tabla de verdad es la siguiente:

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

a) Escriba s en términos de p , q y r , a partir de la tabla de verdad. Reduzca la expresión simbólicamente.

b) Demuestre que $s \implies (r \implies p)$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Proposición lógica]:** Afirmación que puede tomar un único valor de verdad: verdadero (V) o falso (F). Notar que V y F también son proposiciones lógicas con los valores de verdad respectivos ya mencionados. Sean las proposiciones lógicas p , q y r
- **[Conectivos lógicos]:** Permiten crear nuevas proposiciones lógicas a partir de otras ya conocidas.
 - **[Negación]:** conectivo unario que genera la proposición lógica $\bar{p}$, $\neg p$ o p , se lee “no p ”; su valor de verdad es siempre distinto al de p .
 - **[Disyunción (O lógico)]:** conectivo binario que genera la proposición lógica $p \vee q$, se lee “ p o q ”; es verdadera cuando al menos una de las proposiciones p o q es verdadera i.e. si ambas son no falsas (es falsa si ambas son falsas).
 - **[Conjunción (Y lógico)]:** conectivo binario que genera la proposición lógica $p \wedge q$, se lee “ p y q ”; es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas (es falsa si alguna es falsa).
 - **[Implicancia/condicional]:** conectivo binario que genera la proposición lógica $p \Rightarrow q$, se lee “ p implica q ” o “si (ocurre) p , entonces (ocurre) q ”, donde p se denomina **hipótesis** y q se denomina **conclusión** de la proposición lógica; su valor de verdad es siempre verdadero salvo cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa. Importante: una hipótesis falsa permite realizar deducciones lógicamente válidas, sin embargo, esto no asegura que la conclusión sea cierta.
 - **[Equivalencia/bicondicional]:** conectivo binario que genera la proposición lógica $p \Leftrightarrow q$, se lee “ p es equivalente a/con q ” o “ p si y sólo si q ”; es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad, y es falsa cuando p y q tienen distinto valor de verdad.
- **[Orden de precedencia]:** Convención para evitar paréntesis superfluos e identificar la prioridad de los conectivos, de mayor a menor: negación, disyunción y conjunción, e implicancia y equivalencia.
- **[Tautología]:** Proposición lógica cuyo valor de verdad es siempre **verdadero**, independiente del valor de verdad de las proposiciones que la constituyen.
- **[Demostración]:** Argumento que permite saber si es que una proposición es una tautología. Ejemplos son las tablas de verdad, así como técnicas de demostración.
- **[Contradicción]:** Proposición lógica cuyo valor de verdad es siempre **falso**, independiente del valor de verdad de las proposiciones que la constituyen.
- **[Tautologías elementales]:**
 - p es contradicción $\Leftrightarrow \bar{p}$ es tautología
 - **[Dominancia]:** $p \vee V \Leftrightarrow V$, $p \wedge F \Leftrightarrow F$
 - **[Identidad]:** $p \vee F \Leftrightarrow p$, $p \wedge V \Leftrightarrow p$
 - **[Idempotencia]:** $p \vee p \Leftrightarrow p$, $p \wedge p \Leftrightarrow p$
 - **[Doble negación]:** $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$
 - **[Tercio excluso]:** $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow V$
 - **[Consistencia]:** $p \wedge \bar{p} \Leftrightarrow F$
 - **[Absorción]:** $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$, $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
 - **[Relajación]:** $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \Rightarrow p \vee q$
 - **[Caracterización de la implicancia]:**
 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$
 - **[Leyes de De Morgan]:**
 $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$, $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$
 - **[Conmutatividad y asociatividad]:** Disyunción y conjunción conmutan $p \star q \Leftrightarrow q \star p$ y asocian $(p \star q) \star r \Leftrightarrow p \star (q \star r)$.
 - **[Distributividad]:** Disyunción y conjunción distribuyen entre sí, por derecha y por la izquierda:
 - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
 - **[Transitividad]:**
“El amig@ de mi amig@ es mi amig@”
 - $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
 - $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
 - **[Equivalencia dividida]:**
 $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
 - **[Contrarrecíproca]:**
 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
 - **[Contradicción]:**
 $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V] \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow F]$
 - **[Demostración por casos]:**
 $(p_1 \vee p_2 \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)$