

pauta 13

RESUMEN

DEF. (Punto de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$)

$\bar{x} \in \mathbb{R}$ será punto de ac. de A si $\exists (x_n) \subseteq A$ tq $x_n \rightarrow \bar{x}$ con $x_n \neq \bar{x} \forall n \geq n_0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.

DEF. $A' = \{ \bar{x} \in \mathbb{R} : \bar{x} \text{ es punto de acumulación de } A \}$

DEF. (Límite de función)

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$ entonces f tiende a $l \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\bar{x} \in A'$ con $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

TEO. El límite es único.

LÍMITES CONOCIDOS

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Primero una pequeña intro sobre def de lím.

Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \text{Dom } f) \text{ si } |x - \bar{x}| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Es decir, no importa cuál es el valor de ε (siempre con $\varepsilon > 0$) tendremos una definición sobre δ (también $\delta > 0$) tq al imponer $|x - \bar{x}| < \delta$ entonces se debe cumplir que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En otras palabras, trabajamos la expresión $|f(x) - L|$ hasta que llegemos a algo que podamos imponer desde nuestra hipótesis para cualquier $\varepsilon > 0$.

Veamos a qué nos referimos con cada parte de la definición:

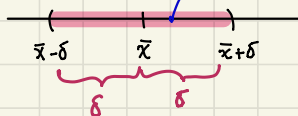
Distancia entre x y $\bar{x}$: $|x - \bar{x}| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - \bar{x} < \delta$

$$\Leftrightarrow -\delta + \bar{x} < x < \delta + \bar{x}$$

$$\Leftrightarrow x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$$

O sea que como $x \in \bullet$ entonces la distancia entre x y $\bar{x}$ siempre será menor a δ

ejemplo: este x : entonces $|x - \bar{x}| = x - \bar{x} < \delta$



En cambio con $|f(x) - L| < \varepsilon$ estamos hablando de que la distancia entre $f(x)$ y L es menor a $\varepsilon > 0$, y como $\varepsilon > 0$ puede ser cualquier número (positivo), entonces por eso hablamos sobre estar "tan cerca como queramos" porque al probar que $|f(x) - L| < \varepsilon \forall \varepsilon > 0$, significa que $f(x)$ está tan cerca de L como sea ε .

Entonces, para demostrar la proposición, una forma de probarlo es ver qué condición es suficiente para que al acotar $|x - \bar{x}| < \delta$ entonces se obtiene la cota $|f(x) - L| < \varepsilon$.
($\Rightarrow$)

Ahora el desarrollo de la aux:

P1b a) $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x > -1) \text{ si } |x-8| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x+1} - 3| < \epsilon$$

Buscamos una condición para δ , o sea $\delta =$ algo que nos sirva para que $|\sqrt{x+1} - 3| < \epsilon$ para cualquier ϵ .

$$\begin{aligned} \text{Tenemos que: } |\sqrt{x+1} - 3| &= \left| \frac{(\sqrt{x+1} - 3) \cdot (\sqrt{x+1} + 3)}{\sqrt{x+1} + 3} \right| \\ &= \left| \frac{x+1-9}{\sqrt{x+1}+3} \right| \\ &= \underbrace{\left| \frac{x-8}{\sqrt{x+1}+3} \right|}_{>0} = \underbrace{\frac{|x-8|}{\sqrt{x+1}+3}}_{>1} < |x-8| \end{aligned}$$

Es decir que hemos probado que:

$$|\sqrt{x+1} - 3| < |x-8|$$

Entonces, como tratamos de encontrar algún $\delta > 0$ tq $|x-8| < \delta$ me asegure que $|\sqrt{x+1} - 3| < \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$.

Notemos que si $\delta = \epsilon$, entonces nuestra hipótesis es:

$$|x-8| < \epsilon, \text{ y como vimos antes que } |\sqrt{x+1} - 3| < |x-8|$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x+1} - 3| < \epsilon \text{ pues } |x-8| < \epsilon.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = 1$$

Queremos encontrar $\delta(\varepsilon) > 0$ tq al estar cerca del 3, entonces la función está cerca del 1. O sea que $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$ tq

$$\text{Si } |x-3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x-2} - 1 \right| < \varepsilon$$

Trabajemos el módulo:

$$|-x| = |x| \quad \forall x$$

$$\left| \frac{1}{x-2} - 1 \right| = \left| \frac{1-x+2}{x-2} \right| = \left| \frac{3-x}{x-2} \right| = \left| \frac{x-3}{x-2} \right|$$

¿cómo podemos acotar $\frac{1}{|x-2|}$ si solo tenemos control sobre la cota sobre $|x-3|$?

Para esto nos ponemos en un caso particular con respecto a la cercanía a 3 (estar "lejos" de 3 pues no depende de ε , y ε puede ser tan pequeño como se quiera)

Entonces: IMPONEMOS una distancia máxima entre x y 3, por ejemplo $\frac{1}{2}$:

$$\text{Esto matemáticamente es: } |x-3| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + 1 < x-2 < \frac{1}{2} + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x-2 < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 > \frac{1}{x-2} > \frac{2}{3} > -2$$

$$\Rightarrow 2 > \frac{1}{x-2} > -2$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{x-2} \right| < 2$$

$$\text{Es decir, si } |x-3| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} < 2$$

vamos a forzar que $\forall \varepsilon > 0 \quad |x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$

Esto daría otro número al elegir otra cota para $|x-3|$.

$$\text{Luego, } \left| \frac{x-3}{x-2} \right| < 2 |x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{Entonces } \delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

pues $\hookrightarrow$ así $|x-3| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \varepsilon > 0$

P2b) Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2(x-1))}{x^2 - 1}$$

Notemos que si $x=1$ entonces $\frac{\sin(2 \cdot 0)}{0} = \frac{0}{0}$ indeterminado, entonces trataremos de usar lím. conocidos.

Ya que hay un $\sin(\cdot)$, usaremos el cambio de variable que nos permita usar ese límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\begin{aligned} \text{Sea } u &= x-1 \Rightarrow x = u+1 \\ \text{Si } x &\rightarrow 1 \Rightarrow u \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\text{Nos queda } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(2u)}{(u+1)^2 - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(2u)}{u^2 + 2u + 1 - 1}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(2u)}{u(u+2)}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin(2u)}{2u} \cdot \frac{1}{u+2}$$

esto es convergente
por cada multiplicación

$$= 2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(2u)}{2u} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u+2}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$$

Como se indifine con $x=3$, buscaremos otra forma de escribir la expresión.

$$\frac{\sqrt{x+6} - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x+1 - 4}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x-3}$$

Todavía se indifine, así que cambiamos de nuevo:

$$\frac{(\sqrt{x+1}+2)(x+6-9)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{(\sqrt{x+1}+2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6}+3)}$$
$$= \frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+6}+3)} \xrightarrow{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3+1}+2}{\sqrt{3+6}+3} = \frac{2+2}{3+3} = \frac{2}{3}$$

↓
pes $\sqrt{x}$ es continua

c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ Se indifine

$$x^{\frac{1}{1-x}} = \exp(\ln x^{\frac{1}{1-x}})$$
$$= \exp\left(\frac{1}{1-x} \ln x\right)$$
$$= \exp\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 1} \left(-1\right) \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)\right)$$

↓ $x \rightarrow 1$

$$\exp(-1) = \frac{1}{e}$$

Como $\frac{\ln x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ es un número
 $\Rightarrow (-1) \frac{\ln x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -1$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$

$$\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = \exp\left(x \cdot \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

Estudie mos lo que está dentro de la exp. cuando $x \rightarrow \infty$

$$x \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}} \quad \text{Si } x \rightarrow \infty \Rightarrow u = \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

Así nos queda $\frac{\ln(1 + \sin(u))}{u} = \frac{\ln(1 + \sin u)}{\sin u} \cdot \frac{\sin u}{u}$

Notemos que el $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ con $u = x-1$
 $\Rightarrow x = u+1$
 $x \rightarrow 1$ entonces $u \rightarrow 0$

Obtenemos este lím. equivalente $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(u+1)}{u} = 1$

Así: $\frac{\ln(1 + \sin u)}{\sin u} \cdot \frac{\sin u}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1 \cdot 1 = 1$

P3b a) calcule los límites:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1} \sin(x)$ Buscamos lím. conocidos.

$\therefore = \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \cos(e^{2x}-1)$ Usando $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$
 $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

$\downarrow x \rightarrow 0$
 $= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \cos(0) = \frac{1}{2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x) + 1 - \cos(x)}{x}$

$\therefore = \frac{\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} + 1 - \cos(x)}{x} = \frac{3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} + \left(\frac{1 - \cos(x)}{x}\right) \cdot x}{x}$

$= 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} + \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot 0 = 3 + 0 = 3$

b) $a > 0$ Demuestra que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$$

$$\Rightarrow \frac{a^x - 1}{x} = \frac{\exp(x \ln(a)) - 1}{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) \quad \text{para usar } \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\downarrow x \rightarrow 0 \text{ pues } x \cdot \ln(a) \rightarrow 0$$

$$1 \cdot \ln(a) = \ln(a)$$

Úsalo para calcular el $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{x - 4}$

Para usar el $\lim$ anterior, hacemos cambio de var.

$$u = x - 4 \Rightarrow x + 4 = u$$

$$x \rightarrow 4 \Rightarrow u \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2^{u+4} - 16}{u} &= \lim_{u \rightarrow 0} 2^4 \left(\frac{2^u - 1}{u} \right) = 2^4 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2^u - 1}{u} \\ &= 2^4 \cdot \ln(2) \end{aligned}$$

Mucho éxito
en el estudio!



(101)