



Auxiliar 13: Límite de funciones

Profesor: Álvaro Hernández U.

Auxiliares: Luis Fuentes Cruz y Antonia Suazo Ruiz

P1. Usando la caracterización $(\epsilon - \delta)$ del límite, demuestre que:

a) $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = 1$

P2. Calcule los siguientes límites en caso de existir:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2(x-1))}{x^2-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin(1/x))^x$

P3. [C6 P2) 2016-1]

a) Calcule, si existen, los siguientes límites:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^{2x}-1) \sin(x)}{e^{2x}-1}$

ii) [**Propuesto**] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x) + 1 - \cos(x)}{x}$

b) Sea $a > 0$, demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

Use este resultado para calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{x - 4}$$

Resumen

Definición 1. $\bar{x}$ es punto de acumulación de A si $\exists(x_n) \subseteq A \setminus \{\bar{x}\}$ tal que $x_n \rightarrow \bar{x}$.

Definición 2. $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$ si para toda sucesión $(x_n) \subseteq A$, $x_n \rightarrow \bar{x}$ con $x_n \neq \bar{x}$, se cumple $f(x_n) \rightarrow L$.

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

Teorema 1 (Álgebra de límites). Si $\lim f(x) = L_1$, $\lim g(x) = L_2$, entonces:

- $\lim(f+g)(x) = L_1 + L_2$
- $\lim(fg)(x) = L_1 L_2$
- Si $L_2 \neq 0$, $\lim \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{L_1}{L_2}$

Teorema 2 (Sándwich). Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim f(x) = \lim h(x) = L$, entonces $\lim g(x) = L$.

Teorema 3 (Composición). Si $\lim g(x) = L$ y $\lim f(y) = M$ con $y = g(x)$, entonces $\lim f(g(x)) = M$.

Proposición 1 (Límites conocidos).

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$

Teorema 4. Si toda sucesión $(x_n) \subseteq A \setminus \{\bar{x}\}$ con $x_n \rightarrow \bar{x}$ cumple $f(x_n) \rightarrow L$, entonces $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L$.

Teorema 5. Si $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$ existe y coincide al restringir a subconjuntos B, C con $\bar{x} \in B' \cap C'$, entonces $\lim f(x) = L$.

Teorema 6 (Caract. ε - δ). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A'$, entonces $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L$ si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definición 3. Límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x)$$

Teorema 6. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L$ si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = L$$

Def. 4. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Def. 5. $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = -\infty$ si

$$\forall M < 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow f(x) < M$$