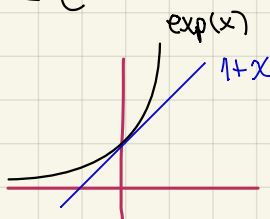


RESUMEN

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x) = e^x$

2. Desigualdad fundamental

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \exp(x) \geq 1+x$$



3. Prod. exp :

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \exp(x) \exp(y) = \exp(x+y)$$

4. $\forall x \in \mathbb{R} \exp(x) > 0 \Rightarrow \text{ker}(\exp) = \emptyset$

5. Props. $\cdot (\forall x \in \mathbb{R}) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

$$\cdot (\forall x, y \in \mathbb{R}) \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$(\forall x < 1) \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

6. Inyectividad y crecimiento

$(\forall x, y \in \mathbb{R})$ si $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$. Entonces es inyectiva en todo su dom.

7. Prop: $\cdot (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall p \in \mathbb{N}) \exp(px) = (\exp(x))^p$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$$

$$\cdot (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall q \in \mathbb{N}) \exp\left(\frac{x}{q}\right) = \sqrt[q]{\exp(x)}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e} = 1$$

8. Biyectividad: La función $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ es sobreyectiva

9. $\nexists \emptyset$ logaritmo: $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(x) = \exp^{-1}(x)$ "inversa de la exp"

10. $(\forall x \in (0, \infty)) \exp(\ln(x)) = x$

$(\forall x \in \mathbb{R}) \ln(\exp(x)) = x$

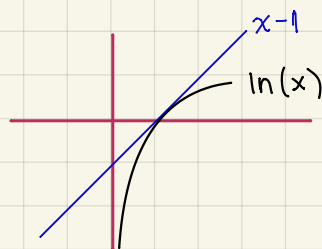
$\text{Ceros}(\ln(x)) = \{1\} \Leftrightarrow \ln(1) = 0$

$\ln(\cdot)$ es inyectiva y estrictamente creciente: $\forall x, y \in (0, \infty)$ si $x < y \Rightarrow \ln(x) < \ln(y)$

11. Props. $(\forall x, y \in (0, \infty)) \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy) \wedge \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

12. Desigualdad fundamental: al tomar $x = \frac{1}{x}$

$(\forall x \in (0, \infty)) \quad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$



13. $(\forall a \in (0, \infty)) (\forall x \in \mathbb{R})$

$a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$ es función

14. Límites conocidos: Sea $a_n \rightarrow a$

$e^{a_n} \rightarrow e^a$

$\left(\frac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} \right) \rightarrow e^a$

Si a_n, a positivos, entonces: 1) $\ln a_n \rightarrow \ln a$
2) $\frac{\ln a_n - \ln(a)}{a_n - a} \rightarrow \frac{1}{a}$

$\sin a_n \rightarrow \sin a$

$\cos a_n \rightarrow \cos a$

— 0 —

Pl) Demuestre que: Si $a_n \rightarrow 0$, entonces $\exp(a_n) \rightarrow 1$ y $\ln(1+a_n) \rightarrow 0$

Notemos que si $a_n \rightarrow a$, entonces, por límite conocido tenemos $\exp(a_n) \rightarrow \exp(a)$.

Como $a_n \rightarrow 0 = a$ entonces lo aplicamos: $\exp(a_n) \rightarrow \exp(0) = 1$

Luego, como $\ln(a_n) \rightarrow \ln(a)$ si $a_n \rightarrow a$, entonces aplicamos lo mismo:

Como $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n + 1 \rightarrow 0 + 1$ por alg. de lím. Así: $\ln(a_n + 1) \rightarrow \ln(0 + 1) = \ln(1) = 0$

P2b Calcule

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1)$

Como solo podemos usar límites conocidos, tratamos de modificar la expresión hasta poder aplicar el lím.

Como $n(e^{1/n} - 1)$ tiene explícito que depende de n estando un número fijo, entonces vale la pena pensar en límite:

$$\text{Si } a_n \rightarrow a \Rightarrow \frac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} \longrightarrow e^a$$

Entonces, veamos si se puede llegar a algo de esa forma:

$$n(e^{1/n} - 1) = \frac{e^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0} \quad \text{Como } \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ entonces } a_n = \frac{1}{n} \text{ y apliquemos}$$
$$a = 0$$

$$n(e^{1/n} - 1) \longrightarrow e^0 = 1$$

b) $\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n+4}$

Primero, modifiquemos la expresión a algo como $\left(1 + \frac{\text{cosas}}{n}\right)^n$ pues ese es un lím. conocido $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x, \forall x \in \mathbb{R}\right)$

$$\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n+4} = \left(\frac{n+3-1}{n+3}\right)^{n+4} = \left(1 + \frac{(-1)}{n+3}\right)^{n+4}$$

BB: El límite que conocemos es con $\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^x$

Entonces lo que podemos hacer es:

$$\left(1 + \frac{(-1)}{n+3}\right)^{n+4} = \left(1 + \frac{(-1)}{n+3}\right)^{n+3+1} = \left(1 + \frac{(-1)}{n+3}\right)^{n+3} \cdot \left(1 + \frac{(-1)}{n+3}\right)$$

Así, usamos el cambio de variable: $k = n+3$, donde cuando $n \rightarrow \infty \Rightarrow k \rightarrow \infty$, entonces efectivamente podemos usar el límite conocido con este cambio de variable

$$\left(1 + \frac{(-1)}{n+3}\right)^{n+3} \longrightarrow e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Luego, $1 + \frac{-1}{n+3} \longrightarrow 1$, entonces, por alg de límites

$$\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n+4} = \left(1 + \frac{(-1)}{n+3}\right)^{n+3} \left(1 + \frac{(-1)}{n+3}\right) \longrightarrow \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n}$

Nuevamente, manipulamos la expresión hasta llegar a algo conocido:

$$\frac{\ln(n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \ln(n) = \ln(n^{\frac{1}{n}}) = \ln(\sqrt[n]{n})$$

Como conocemos el límite $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. Entonces, podemos usar también que:

si $a_n \rightarrow a$ entonces $\ln(a_n) \rightarrow \ln(a)$ con $a_n = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 = a$

Así $\frac{\ln(n)}{n} = \ln(\sqrt[n]{n}) \rightarrow \ln(1) = 0$

P3) Calcule

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n \cdot \ln(6)}$

Dado que esta expresión no tiene un cambio de variable tan directo como en P2) b), usamos la importante prop: $\forall x > 0^*$ $x = \exp(\ln(x))$, para después usar las props y límites que conocemos.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n \cdot \ln(6)} &= \exp\left(\ln\left[\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n \cdot \ln(6)}\right]\right) \\ &= \exp\left(\left(\ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right]\right) \cdot n \cdot \ln(6)\right) \end{aligned}$$

* Obs. $x = \exp(\ln(x))$ funciona mientras $x > 0$.
Entonces, ¿por qué lo podemos usar si $x = 1 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ con $n \in \mathbb{N}$ siendo que si $n=1$ entonces $x = 1 + \frac{-1}{1^2} = 0$?

Si conociéramos los límites de $\frac{(-1)^n}{n^2}$ y n , entonces tendríamos que $\exp\left(\lim\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \cdot \lim(n)\right)$ por álgebra de límites y límite conocido: si $a_n \rightarrow a \Rightarrow e^{a_n} \rightarrow e^a$.

La justificación para esto es justamente porque queremos usar el $n \rightarrow \infty$, entonces basta con que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $1 + \frac{(-1)^n}{n^2} > 0$.

Sin embargo, ¿cuál es el límite de $\frac{(-1)^n}{n^2}$?

$n \cdot \ln(6) \rightarrow \infty$ pues $\ln(6)$ es de y n es no acotado.

Es decir, para sacar límites, podemos evaluar en $\ln(\cdot)$ si a partir de un instante el argumento del logaritmo es positivo (en general no es necesario justificarlo para el control, pero es para que sepan).

Entonces no podemos tirar límite aún pues $\lim\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \rightarrow \infty$.

Pensemos en qué otro lím. conocemos con $\ln(\cdot)$. Por ejemplo: si $a_n \rightarrow a > 0 \Rightarrow \frac{\ln a_n - \ln a}{a_n - a} \rightarrow \frac{1}{a}$

Esto se ve prometedor ya que tiene una fracción y esto nos podría ayudar a obtener algo convergente al multiplicarlo por $\frac{(-1)^n}{n^2}$. Para usar el lím. conocido mencionado, hacemos un n quitado, ni pone $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$

Como $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) \rightarrow \ln(1) = 0$ pues $1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \rightarrow 1 > 0$ usando: si $a_n \rightarrow a > 0 \Rightarrow \ln(a_n) \rightarrow \ln(a)$ entonces

podemos usar que: $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) - \ln(1)}{1 + \frac{(-1)^n}{n^2} - 1} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} - 1\right)$

Continuando junto con lo anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{-1}{n^2}\right) - \ln(1)}{1 + \frac{-1}{n^2} - 1} \right) \cdot \left(\cancel{1} + \frac{-1}{n^2} \cancel{-1} \right) (n \cdot \ln(6)) \\
 &= \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{-1}{n^2}\right) - \ln(1)}{1 + \frac{-1}{n^2} - 1} \right) \cdot \frac{(-1)}{n^2} \cdot \cancel{n} \cdot \ln(6) \\
 &= \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{-1}{n^2}\right) - \ln(1)}{1 + \frac{-1}{n^2} - 1} \right) \cdot \frac{1}{n} \cdot (-\ln(6))
 \end{aligned}$$

$\rightarrow \frac{1}{1}$ usando $a_n = 1 + \frac{-1}{n^2} \rightarrow 1 = a$ con el límite conocido que mencionamos antes.

= nula · acotada $\rightarrow$ nula = 0

$$\begin{aligned}
 \text{Es decir, } \exp(\bullet \cdot \bullet) &= \exp(\bullet \cdot \bullet) \rightarrow \exp(\lim(\bullet) \lim(\bullet)) = \exp(1 \cdot 0) \\
 &= \exp(0) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n \cdot \ln(6)} = 1.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \ln\left(e + \frac{1}{n^2}\right) \right) n^2$$

Como tenemos una sucesión dentro de un $\ln(\cdot)$, veamos si nos sirve tirar su lím. y usar lím. conocido.

$$e + \frac{1}{n^2} \rightarrow e \Rightarrow \ln\left(e + \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow \ln(e) = 1$$

Luego, volviendo a la expresión original:

$$\left(1 - \ln\left(e + \frac{1}{n^2}\right) \right) n^2 = \frac{1 - \ln\left(e + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = (-1) \left(\frac{\ln\left(e + \frac{1}{n^2}\right) - 1}{\frac{1}{n^2}} \right)$$

$$\text{Al usar el lím: Si } a_n \rightarrow a > 0 \Rightarrow \frac{\ln a_n - \ln(a)}{a_n - a} \rightarrow \frac{1}{a}$$

$$\text{con } a_n = e + \frac{1}{n^2} \rightarrow e = a > 0, \ln\left(e + \frac{1}{n^2}\right) \text{ y } \ln(e) = 1$$

y hacemos un ni quita ni pone ($0 = x - x$)

$$(-1) \left(\frac{\ln\left(e + \frac{1}{n^2}\right) - 1}{e + \frac{1}{n^2} - e} \right) \longrightarrow (-1) \frac{1}{e} = \frac{-1}{e}$$

Problema 1 Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{2}{n}} \cdot 3^{\frac{\sin(n)}{n^2}}}{1 - \frac{1}{\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^\pi}}$

Para calcular esto hay que recordar qué alg. de límites conocemos:

Si $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$ (es decir, son convergentes)

i) $a_n + b_n \rightarrow a + b$

ii) $\lambda a_n \rightarrow \lambda a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ si $b_n, b > 0$

Entonces vamos a buscar el límite de la expresión original parte por parte para poder concluir usando alg. de límites (i, ii, iii) de límites conocidos

$$\frac{2^{\frac{2}{n}} \cdot 3^{\frac{\sin(n)}{n^2}}}{1 - \frac{1}{\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^\pi}} \longrightarrow \frac{\lim(\text{●}) \cdot \lim(\text{●})}{1 - \frac{1}{\lim(\text{●})} \pi}$$

Para encontrar cada límite: En general con potencias conviene $\exp(\ln(\cdot))$

● = $\exp(\ln(2^{\frac{2}{n}})) = \exp\left(\frac{2}{n} \cdot \ln(2)\right) \xrightarrow{\text{nula} \cdot \text{acotada} \rightarrow \text{nula}} e^0 = 1$

● = $\exp(\ln(3^{\frac{\sin(n)}{n^2}})) = \exp\left(\frac{1}{n} \cdot 2 \cdot \ln(3)\right) \xrightarrow{\text{nula} \cdot \text{acotada} \rightarrow \text{nula}} e^0 = 1$

● = $\frac{2n+2}{3n+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{2 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{nula}} \frac{2}{3}$

$$\frac{2^{\frac{2}{n}} \cdot 3^{\frac{\sin(n)}{n^2}}}{1 - \frac{1}{\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^\pi}} \longrightarrow \frac{\lim(\text{●}) \cdot \lim(\text{●})}{1 - \frac{1}{\lim(\text{●})} \pi} = \frac{1 \cdot 1}{1 - \frac{1}{\frac{2}{3}} \pi} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \pi} = \left(1 - \frac{3}{2} \pi\right)^{-1}$$

P5 Demuestre que $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ y que $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ son convergentes, y que además tienen mismo lím.

Hint: Utilice Teo. suc. monótonas.

Dado que el hint nos dice que usemos teo. de suc. monótonas, veamos cómo puede ser útil para x_n o y_n , o sea, estudiemos su crecimiento.

Primero x_n .

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Recordemos que para $\ln(\cdot)$, tenemos la siguiente desigualdad fundamental: $\forall x > 0 \quad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

Entonces
$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

$$x_{n+1} = x_n + \ln(n) + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

$$= x_n + \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = x_n + \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)$$

$$= x_n + \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right)$$

$$= x_n + \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = x_n + \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)$$

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 1 - \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{-1}{n+1}$$

↗ desigualdad fundamental!

$$\text{Es decir, } x_n + \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq x_n + \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)}{n+1} = x_n$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \{1, \dots\}$$

Así, $(x_n)_n$ es sucesión monótona decreciente.

$$\text{Entonces } \forall n \geq 1 \quad x_n \leq x_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} - \ln(1) = \frac{1}{1} - 0 = 1 \Rightarrow x_n \leq 1 \quad \forall n$$

Ahora estudiaremos el crecimiento de (y_n) . Para esto estudiaremos el signo de la resta:

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - \frac{1}{n+1} - x_n + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

$$= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

desigualdad
fundamental

$$\geq 1 - \frac{n+1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1 + 1}{n} = 0$$

Es decir que $y_{n+1} \geq y_n \quad \forall n \geq 1$ (y_n) es monótona creciente.

Entonces $\forall n \quad y_n \geq y_1 = x_1 - \frac{1}{1} = x_1 - 1 = 1 - 1 = 0$

$$\Rightarrow \forall n \quad y_n \geq 0$$

Claramente $x_n \geq \underbrace{x_n - \frac{1}{n}}_{y_n} \quad \forall n \quad \text{pues } -\frac{1}{n} < 0$

$$\Rightarrow x_n \geq y_n$$

Por lo tanto $0 \leq y_n \leq x_n \leq 1 \quad \forall n$

Es decir, (x_n) es sucesión decreciente acotada inferiormente, entonces por teo. de suc. monótonas es convergente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \quad \text{con } \bar{x} \in \mathbb{R}$$

Y para (y_n) tenemos que es acotada superiormente y creciente, así que en virtud del mismo teo, (y_n) es convergente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y} \quad \text{con } \bar{y} \in \mathbb{R}.$$

Falta ver que $\bar{x} = \bar{y}$.

Notemos que $\bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{1}{n} \right)$

$\xrightarrow[\substack{\text{pues } x_n \\ \text{es conv. y } \frac{1}{n} \\ \text{también}}]{\text{Límite de suma}} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)$
 $= \bar{x} - 0$
 $= \bar{x}$

∴ $\bar{y} = \bar{x}$ ■