

* pauta aux 9 *

P1b

Demuestre por definición que $\sqrt{|a_n|} \rightarrow 0$ si $a_n \rightarrow 0$

En efecto, queremos demostrar lo siguiente:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |\sqrt{|a_n|} - 0| < \varepsilon$$

Primero, notemos que la desigualdad que buscamos probar es:

$$|\sqrt{|a_n|} - 0| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{|a_n|}| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|a_n|} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |a_n| \leq \varepsilon^2$$

Así, para $\varepsilon > 0$ arbitrario, tendremos que para que $|\sqrt{|a_n|} - 0| < \varepsilon$, nos basta que se cumpla $|a_n| \leq \varepsilon^2 \quad \forall n \geq n_0$ *

Como por enunciado tenemos que $a_n \rightarrow 0$ esto es equivalente a:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

Es decir, para CUALQUIER $\varepsilon > 0$ ya existe no tq $\forall n \geq n_0 |a_n| < \varepsilon$. En particular, podemos tomar $\varepsilon = \varepsilon^2 > 0$ pues $\varepsilon^2 > 0$. Esto, por definición de $a_n \rightarrow 0$ quiere decir que

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |a_n| < \varepsilon^2 \quad \text{y es justamente lo que queríamos en } *$$

$$\therefore \forall n \geq n_0 |\sqrt{|a_n|} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{|a_n|} \rightarrow 0$$

P2b

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{3n+1} = \frac{2n+4}{3n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{2 + \frac{4}{n}}{3 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

alg. de l'ím

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 2}{5n^5 - 6n + 1} = \frac{4n^4 + 2}{5n^5 - 6n + 1} \cdot \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^5}} = \frac{\frac{4}{n} + \frac{2}{n^5}}{5 - \frac{6}{n^4} + \frac{1}{n^5}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0+0}{5+0+0} = 0$$

alg. de l'ím

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n^3 + 3}{n^3 + n - 7} = \frac{n - n^3 + 3}{n^3 + n - 7} \cdot \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{\frac{1}{n^2} - 1 + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{7}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0-1+0}{1+0-0} = \frac{-1}{1} = -1$$

alg. de l'ím

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} - n + 3}{n^2 + n - 7} = \frac{n\sqrt{n} - n + 3}{n^2 + n - 7} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2}}$$

Como no conocemos (a priori) el $\lim \frac{\sqrt{n}}{n}$, entonces no podemos usar alg. de l m.

Notemos que $\frac{\sqrt{n}}{n} = n^{\frac{1}{2}-1} = n^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$

Luego, como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ y por P11 entonces $\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$

Entonces $\frac{\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2}} \xrightarrow{\text{alg. l m}} \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 0$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Sabemos que $(-1)^n \leq 1 \quad \forall n$ i.e. es acotada

Luego, $(-1)^n \cdot \frac{1}{n} = \text{acotada} \cdot \text{nula} \rightarrow \text{nula}$

prop. apunte

Es decir $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$.

P31 (a) Demuestre por definición que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{3}{n}} = 1$$

Además, determine algún $n_0 \in \mathbb{N}$ que garantice que $\forall n \geq n_0$ se cumple que

$$\left| \sqrt{1 + \frac{3}{n}} - 1 \right| \leq \frac{1}{1001}$$

Probamos l m por definición, es decir, queremos que:

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \left| \sqrt{1 + \frac{3}{n}} - 1 \right| < \epsilon$$

Sea $\epsilon > 0$. Como queremos probar lo de arriba una forma es estudiar $|\epsilon_n - l|$ y luego acotarla hasta encontrar una condición correcta para $\epsilon > 0$ que garantice la existencia de un n_0 tq $\forall n \geq n_0 \quad |\epsilon_n - l| < \epsilon$.

En efecto $|\epsilon_n - l| = \left| \sqrt{1 + \frac{3}{n}} - 1 \right|$

$$= \left| \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} - 1 \right) \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1 + \frac{3}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \right| = \frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} < \frac{3}{n \cdot 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

$\downarrow$
todo es > 0
 $\underbrace{\qquad}_{> 1}$
 $\underbrace{\qquad}_{> 2}$

Es decir, $\left| \sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1 \right| < \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n}$

Para encontrar el $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ hay 2 formas: ① Prop. Arquimedeana ② Dar n_0 explícito

① Por P.A. se tiene que
 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \quad \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$

Entonces, basta tomar $\varepsilon = \frac{2}{3} \varepsilon$

y por P.A. $\frac{1}{n_0} \leq \frac{2}{3} \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$

Que es lo que queríamos probar.

② Queremos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall \varepsilon > 0$ se cumple:

$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon$

Entonces basta que $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} < n$

y tomamos $n_0 = \left\lceil \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}$ y se cumple:

$(\forall n \geq n_0) \quad \left| \sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1 \right| \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \#$

Así $\lim \sqrt{1+\frac{3}{n}} = 1$

Ahora, veamos cuál n_0 garantiza que $\left| \sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1 \right| \leq \frac{1}{1001}$

Por $\#$ tenemos que para $\varepsilon = \frac{1}{1001}$ $(\forall n \geq n_0) \quad \left| \sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1 \right| \leq \frac{1}{1001}$ si tomamos el n_0 que

decimos: $n_0 = \left\lceil \frac{3}{2} \cdot 1001 \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{3003}{2} \right\rceil + 1 = 1001 + 1 = 1002$

b.1) $\lim \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4} \quad \frac{\sin(n!) + 2n^2 \cdot \frac{1}{n^2}}{3n^2 + 4 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{\sin(n!) + 2}{3 + \frac{4}{n^2}} \xrightarrow[\text{alg de lím}]{\substack{\text{asíntota} \cdot \text{nula} \rightarrow \text{nula}}} \frac{0 + 2}{3 + 0} = \frac{2}{3}$

b.2) $\lim n \left(1 - \sqrt{1+\frac{3}{n}} \right)$
 $\downarrow$
NO asíntota nula $\Rightarrow$ no es nula por alg de lím.

Hay que ver otra forma de calcularlo:

$n \left(1 - \sqrt{1+\frac{3}{n}} \right) = n \left(1 - \sqrt{1+\frac{3}{n}} \right) \frac{1 + \sqrt{1+\frac{3}{n}}}{1 + \sqrt{1+\frac{3}{n}}} = n \left(\frac{1 - (1 + \frac{3}{n})}{1 + \sqrt{1+\frac{3}{n}}} \right) = \frac{-3}{1 + \sqrt{1+\frac{3}{n}}}$

$= \frac{-3}{1 + \sqrt{1+\frac{3}{n}}} \xrightarrow[\text{alg de lím}]{\substack{\text{como por a) } \sqrt{1+\frac{3}{n}} \rightarrow 1 \\ \text{podemos usar}}}$
 $= \frac{-3}{1+1} = \frac{-3}{2}$