

* pauta aux 8 *

Pl Utilizando la prop. arquimediana, pruebe que

$$\inf \left\{ \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$$

$$\text{Sea } A = \left\{ \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Nos piden probar que $\inf(A) = 0$, usando la prop. arquimediana. Como se debe probar, primero evaluamos si tiene sentido calcular el ínfimo de A , es decir, veamos si nuestro conjunto **TIENE** ínfimo para poder calcularlo.

Para que un conjunto tenga ínfimo, debe cumplir las hipótesis de la **PROP del ínfimo**: ① $A \neq \emptyset$. Es decir, $\exists a \in A$.

② A debe ser acotado inferiormente: Tener cota inferior significa que sea $c \in \mathbb{R}$, sera cota inferior de $A \Leftrightarrow \forall a \in A \quad c \leq a$

① **$A \neq \emptyset$** : En efecto, basta tomar $n=0$, $\frac{1}{2 \cdot 0 + 1} = \frac{1}{0+1} = 1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

② **A es acotado inferiormente**: Dado que $n \geq 0 \Rightarrow 2n+1 > 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego 0 es cota inferior de A

$\Rightarrow A$ es acotado inferiormente.

$\therefore$ Por AXIOMA del SUPREMO $\Rightarrow \exists \inf(A)$, $\inf(A) \in \mathbb{R}$.

• Nuestro candidato a ínfimo será 0 , es decir, veamos que es la cota inferior más grande.

Por contradicción, supongamos que $\inf(A) \neq 0$, es decir, que existe cota inferior de A más grande que 0 . Digamos que es $0+\epsilon$ con $\epsilon > 0$. Luego $0+\epsilon$ es cota inf de A :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 + \epsilon < \frac{1}{2n+1}$$

$$\epsilon < \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \epsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pues, por prop. arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\epsilon > \frac{1}{n_0} \quad \forall \epsilon > 0$

Así $0+\epsilon$ NO puede ser cota inferior de A .

$$\Rightarrow \inf(A) = 0 \quad \square$$

P2 $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acotado con $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ decreciente. Demuestre que $f(A)$ tiene ínfimo y supremo

$$\text{Además que: } f(\sup(A)) \leq \inf(f(A)) \leq \sup(f(A)) \leq f(\inf(A))$$

Como $A \neq \emptyset$ y acotado por enunciado, A tiene $\sup(A)$ e $\inf(A)$, así:

$$\forall x \in A \quad \inf(A) \leq x \leq \sup(A)$$

Y como f decreciente:

$$\forall x \in A \quad f(\sup(A)) \leq f(x) \leq f(\inf(A))$$

Luego, como $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \Rightarrow \exists f(a) \in f(A) \Rightarrow f(A) \neq \emptyset$. Y por lo anterior:

$$f(\sup(A)) \leq y \leq f(\inf(A)) \quad \forall y \in f(A) \quad (\star)$$

Es decir $f(A)$ es acotado.

$\Rightarrow$ Por Axioma del sup. y prop. del inf. $f(A)$ tiene sup. e inf.

• Ahora, para las desigualdades tenemos que por $(\star)$ $f(\sup(A))$ es cota inferior de $f(A)$, y por DEFINICIÓN de ÍNFINO será más chica que el ínfimo y se tiene:

$$f(\sup(A)) \leq \inf(f(A))$$

• Trivialmente se tiene que $\inf(f(A)) \leq \sup(f(A))$

• Y finalmente, por $(\star)$ tenemos que $f(\inf(A))$ es cota superior de $f(A)$, y por DEFINICIÓN de SUPREMO se tiene:

$$\sup(f(A)) \leq f(\inf(A))$$

Juntando todo obtenemos

$$f(\sup(A)) \leq \inf(f(A)) \leq \sup(f(A)) \leq f(\inf(A)) \quad \square$$

P3 Determine el supremo de $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \geq 1, n \in \mathbb{N} \right\}$

Primero veamos que tiene supremo:

• $A \neq \emptyset$: basta tomar $n=1 \Rightarrow (-1)^1 + \frac{1}{1} = -1 + 1 = 0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

• A es acotado superiormente.

En efecto, $\forall n \geq 1 \quad (-1)^n \leq 1 \quad \wedge \quad n \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 : (-1)^n + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2$$

Luego A está acotado superiormente.

Por axioma del supremo $\exists \sup(A)$.

Para calcular el supremo, primero notemos que cuando $n=2k+1$ (impar) entonces

$$(-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} = -1 + \underbrace{\frac{1}{2k+1}}_{< 1} < -1 + 1 = 0$$

y como cuando $n=2k$ (par) tenemos:

$$(-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2k}}_{> 0} > 0$$

Entonces al encontrar una cota superior para el caso PAR ($n=2k$), será cota superior de A (los impares están acotados superiormente por 0)

$$\text{Así con } n=2k, \quad (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$$

$$\text{Como } \frac{1}{k} \leq 1 \quad \forall k \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Entonces } \forall k \geq 1 \quad 1 + \frac{1}{2k} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Es decir $\frac{3}{2}$ es cota superior de A . Supongamos que no es el supremo, o sea que:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tq } \forall n \geq 1 \quad (-1)^n + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2} - \varepsilon$$

$$\text{Pero si tomamos } n=2 \text{ se obtiene: } (-1)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \leq 0 \quad \leftarrow \quad \therefore \sup(A) = \frac{3}{2} \quad \square$$

P4 f es estrictamente creciente con dominio $[0,1]$. Demuestre que $f([0,1])$ es acotado superiormente. Calcule el sup. y determine si posee máximo.

Como el dom = $[0,1]$ y f es estrictamente creciente :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) \leq f(1) \quad *$$

Luego, $f([0,1])$ es acotado superiormente.

Tenemos que $f([0,1]) \neq \emptyset$ pues $f(1) \in f([0,1])$.

Así, por axioma del supremo $\exists \sup(f([0,1]))$

Como por $*$ tenemos que $f(1)$ es COTA SUPERIOR de $f([0,1])$ y también tenemos que $f(1) \in f([0,1])$ entonces podemos concluir (como en P3) que :

$$\sup(f([0,1])) = f(1).$$

Finalmente sí posee máximo pues $f(1) \in f([0,1])$.
□