



Auxiliar 9: Sucesiones I

Profesor: Álvaro Hernández U.

Auxiliares: Luis Fuentes Cruz y Antonia Suazo Ruiz

P1. Demuestre por definición lo siguiente: si (a_n) es una sucesión tal que $\lim a_n = 0$, entonces

$$\lim \sqrt{|a_n|} = 0.$$

P2. Calcule los siguientes límites.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{3n+1}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} - n + 3}{n^2 + n - 7}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 2}{5n^5 - 6n + 1}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n^3 + 3}{n^3 + n - 7}$

P3. (a) Demuestre por definición que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{3}{n}} = 1.$$

Además, determine algún n_0 que garantice que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que

$$\left| \sqrt{1 + \frac{3}{n}} - 1 \right| \leq \frac{1}{1001}.$$

(b) Calcule los siguientes límites justificando apropiadamente sus respuestas:

(b.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4}$

(b.2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}} \right)$

Resumen

Definición 1. Diremos que la sucesión (s_n) converge a l , o bien que los términos s_n tienden a l (lo cual anotaremos $s_n \rightarrow l$), si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) s_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon].$$

Observación: Las siguientes expresiones son equivalentes a la anterior:

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) l - \varepsilon \leq s_n \leq l + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |s_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |s_n - l| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq n_0) |s_n - l| \leq \varepsilon$$

Definición 2. La sucesión (s_n) se llama *sucesión nula* si $s_n \rightarrow 0$.

Definición 3. La sucesión (s_n) se llama *sucesión acotada* si $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) |s_n| \leq M$.

Teorema 1. Sean (u_n) y (v_n) sucesiones. Las siguientes proposiciones son ciertas:

1. (u_n) es *nula* si y sólo si $(|u_n|)$ es *nula*.
2. Si (u_n) es una sucesión *nula*, entonces (u_n) es una sucesión *acotada*.
3. Si (u_n) es una sucesión *nula* y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, se cumple $|v_n| \leq u_n$, entonces (v_n) es una sucesión *nula*.
4. Si (u_n) y (v_n) son sucesiones *nulas*, entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones *nulas*.
5. Si (u_n) y (v_n) son sucesiones *acotadas*, entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones *acotadas*.
6. Si (u_n) es una sucesión *nula* y (v_n) es una sucesión *acotada*, entonces $(u_n \cdot v_n)$ es una sucesión *nula*. Un caso particular de esto es cuando $v_n = c$ constante.

Proposición 1. Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v , respectivamente. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $(u_n + v_n)$ es convergente, y su límite es $u + v$:

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n.$$

2. $(u_n - v_n)$ es convergente, y su límite es $u - v$:

$$\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n.$$

3. $(u_n \cdot v_n)$ es convergente, y su límite es $u \cdot v$:

$$\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n.$$

4. (λu_n) es convergente, y su límite es λu :

$$\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim u_n.$$

Límites importantes

- $s_n = a$, para $a \in \mathbb{R}$, satisface $\lim s_n = a$.
- $\lim n^{-1} = 0$.
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $s_n = n^k$, para $k \in \mathbb{N}$, no es acotada, luego *diverge*.
- Sea

$$s_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0},$$

para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces:

- Si $p < q$, entonces $s_n \rightarrow 0$.
- Si $p = q$, entonces $s_n \rightarrow \frac{a_p}{b_q}$.
- Si $p > q$, entonces $\left(\frac{1}{s_n}\right) \rightarrow 0$, por lo tanto (s_n) no es acotada y *diverge*.

- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

- $\lim a^n = 0$, para $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < 1$.