



Auxiliar 8: Axioma del Supremo

Profesor: Álvaro Hernández U.

Auxiliares: Luis Fuentes Cruz y Antonia Suazo Ruiz

P1. Utilizando la propiedad arquimediana, pruebe que

$$\inf \left\{ \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$$

P2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ subconjunto no vacío y acotado, y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente. Demuestre que el conjunto imagen $f(A)$ tiene ínfimo y supremo, y que

$$f(\sup(A)) \leq \inf(f(A)) \leq \sup(f(A)) \leq f(\inf(A)).$$

P3. Determine si el siguiente conjunto tiene supremo. Si ese es el caso, calculelo:

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (1)$$

P4. Sea f una función estrictamente creciente cuyo dominio es el intervalo $[0, 1]$. Demuestre que el conjunto $f([0, 1])$ es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto $f([0, 1])$ y determine si posee máximo.

Resumen

Definición 1: Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice *acotado superiormente* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, x \leq M$. Decimos que M es una *cota superior* de A , y si además $M \in A$, decimos que es *máximo* de A .

Definición 2: Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice *acotado inferiormente* si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, m \leq x$. Decimos que m es una *cota inferior* de A , y si además $m \in A$, decimos que es *mínimo* de A .

Definición 3: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Diremos que S es *supremo* de A , denotado por $\sup(A)$, si:

- S es cota superior de A
- Cualquier otra cota superior de A es mayor que S .

Con esto, $\sup(A)$ es la menor cota superior de A .

Definición 4: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Diremos que s es *ínfimo* de A , denotado por $\inf(A)$, si:

- s es cota inferior de A
- Cualquier otra cota inferior de A es menor que s .

Con esto, $\inf(A)$ es la mayor cota inferior de A .

Proposición 1 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos. Se definen $A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$ y $A \cdot B = \{x \cdot y | x \in A, y \in B\}$, entonces:

- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
- $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$, si $A, B \subseteq [0, \infty)$

Axioma 8 (del supremo) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado superiormente, entonces $\sup(A)$ existe.

Proposición 2 (del ínfimo) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado inferiormente, entonces $\inf(A)$ existe.

Definición 5 Se define la *parte entera* de $x > 0$ como:

$$\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$$

Además, se cumple $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Proposición 3 (Caracterización del supremo) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ conjunto no vacío. Se tiene que $S = \sup(A)$ si y sólo si:

- $\forall x \in A, x \leq S$, es decir, S es cota superior de A .
- Ningún valor menor que S es cota superior, es decir, $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, S - \epsilon < x$.

Proposición 4 (Caracterización del ínfimo) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ conjunto no vacío. Se tiene que $s = \inf(A)$ si y sólo si:

- $\forall x \in A, s \leq x$, es decir, s es cota inferior de A .
- Ningún valor mayor que s es cota inferior, es decir, $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, x < s + \epsilon$.

Teorema 1 $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

Proposición 5 (Propiedad Arquimediana) El conjunto $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, n_0 \cdot \epsilon > 1$.

Teorema 2 $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, es decir, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (x, y)$.