pauta aux 5

P1) Sea $x \mapsto f(x) = x|x|$

a) Determine el dominio, ceros, paridad, signos y crecimiento de la función.

• Dominio: Dado que la función no se indetermina nunca tenemos $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

• Ceros: Queremos encontrar todos los "x's" $\in \text{Dom} f$ tales que $f(x) = 0$.

Imponemos "$f(x) = 0$" y buscamos:

$$f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x|x| = 0$$

Entonces o $x = 0$ o $|x| = 0$, en ambos casos $x = 0$, por lo tanto $\text{ceros}(f) = \{0$

• Paridad: Evaluamos la función en $\underline{\underline{-x}}$ y vemos si sale $f(x)$ (par) o $-f(x)$ (impar)

En efecto, sea $x \in \text{dom} f = \mathbb{R}$ entonces $-x \in \text{dom} f$.

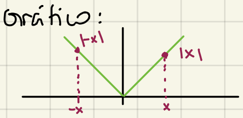
Así

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)|-x| \\ &= -x \cdot |x| \\ &= -x|x| \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

recordatorio:

La función $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$;

Gráfico:



$|x| = |-x|$

• Signos: Esto es ver cuando $\underline{f(x)}$ cambia de signo. Es decir determinar aquellos intervalos en el dominio donde $f(x) \geq 0$ o bien $f(x) \leq 0$. En este caso, conviene analizar la función en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ porque el módulo está definido por partes.

Hacemos la tablita:

	$x<0$	$x>0$
$f(x)$		

Calculamos para cada caso:

CASO 1: $x < 0$

como $x<0$ $\Rightarrow |x| = -x$ (ver recordatorio)

$$\begin{aligned} f(x) = x|x| &= x(-x) \\ &= -x^2 < 0 \end{aligned}$$

pues $x^2 > 0$ $\forall x$ $\Rightarrow -x^2 < 0$

CASO 2: $x > 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x|x| \\ &= x \cdot x \\ &= x^2 > 0 \end{aligned}$$

$x>0$ $|x| = x$

Entonces llenamos la tablita:

	$x<0$	$x>0$
$f(x)$	$-$	$+$

👀: Esto tiene sentido pues f es impar.

* No es necesario hacer la tablita más de una vez, pueden rellenar la anterior y escribir que la llenaron después, o bien hacerla al final.

- Crecimiento: Como f es impar, vamos a estudiar solo el dominio $(0,\infty)$ y después analizaremos lo que pasa en el resto del dominio.

Entonces, sean $x_1, x_2 \in (0,\infty)$ sin pérdida de generalidad $x_1 < x_2$ (vean qué pasa si $x_1 > x_2$ 👉)

Vamos a estudiar el signo de

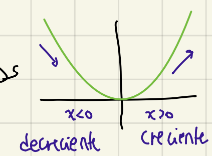
$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1|x_1| - x_2|x_2| \\ &\overset{x_1, x_2 > 0}{=} x_1 \cdot x_1 - x_2 \cdot x_2 \\ &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1 + x_2)}_{>0}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{\substack{x_1 < x_2 \\ \Rightarrow x_1 - x_2 < 0}} < 0 \end{aligned}$$

Así $f(x_1) - f(x_2) > 0$
$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Es decir que, cuando $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ entonces es creciente estricta en $(0, \infty^+)$.

Como f es impar, tendremos el mismo crecimiento al tomar $x_1, x_2 < 0$.

👀: Si f fuera par, el crecimiento sería el inverso c/r al de los positivos



Tambien se tiene que si $x_1 < 0 < x_2$, por los signos de f tenemos que $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, es decir, f es estrictamente creciente en todo su dominio $(\mathbb{R})$.

b) Determine inyectividad, sobreyectividad y calcule su inversa si corresponde.

- Inyectividad: f es inyectiva pues es <u>estrictamente</u> creciente en todo $\mathbb{R}$. En efecto, sean $x_1 \neq x_2 \in \text{Dom } f$.
Spg $x_1 < x_2 \underset{f \text{ es creciente}}{\Longrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. ▫

- Sobreyectiva: Asumiremos que es el codominio usual, es decir, $\mathbb{R}$. Así, f será sobreyectiva ssi $\text{Im } f = \mathbb{R}$.
Estudiemos $\text{Im } f$.

Por definición $\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \text{Dom} f \ f(x) = y\}$ Se lee "todos los y's en $\mathbb{R}$ tales que exista algún x en el dominio de f y que su imagen sea y".

$\overset{\text{Dom} f = \mathbb{R}}{=} \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \ f(x) = y\}$

En efecto, tomaremos el dominio restringido a los positivos y aprovechar que f es impar.

Sea $x \in (0, \infty^+)$, entonces
$$\begin{aligned} f(x) &= x|x| \\ &= x \cdot x \\ &= \underbrace{x^2 = y}_{\text{¿a qué valores llega } x^2\text{?}} \end{aligned}$$

¿a qué valores llega x^2? A todos los positivos, es decir, cuando $x > 0$
$\Rightarrow x^2 > 0$
$\Rightarrow y > 0$

conjunto imagen del conjunto de adentro

Así $f(\underbrace{(0, \infty^+)}_{\text{conjunto!}}) = (0, \infty^+)$ → Notación de conjunto imagen.

Luego, como f es impar, lo que sucede en el DOMINIO positivo, pasará al revés (simetría con respecto al origen) así tenemos que $f((-\infty, 0)) = (-\infty, 0)$.

Finalmente, como $f(0) = 0 \cdot |0| = 0$, tenemos que $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \operatorname{Dom} f$ tq $f(x) = y$ es decir, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, $\therefore$ es sobreyectiva. ∎

• Inversa: Dado que f es inyectiva y sobreyectiva $\Leftrightarrow f$ es biyectiva. Es decir, existe inversa. Para calcularla, despejamos x desde $f(x) = y$: Lo haremos por parte por la def de módulo.

Sea $x \in [0, \infty^+)$.
$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & x|x| = y \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = y \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\sqrt{y} \\ & \ \ = \sqrt{y} \end{aligned}$$

Se le puede aplicar raíz pues $x \geq 0$ y ya vimos que su imagen también, es decir $y \geq 0$.

→ elegimos + pues $x > 0$ y $\sqrt{y} > 0$

Ahora el resto del dom f: sea $x \in (-\infty, 0)$

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & x|x| = y \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot (-x) = y \\ & -x^2 = y \\ & x^2 = -y \\ & x = \pm\sqrt{-y} \\ & \ \ = -\sqrt{-y} \end{aligned}$$

Aquí $y < 0$!

Def $|x| = -x$ si $x < 0$

Ahora $-y > 0$! $\Rightarrow$ se puede aplicar raíz

→ pues $x < 0$

Así, la inversa será: $f^{-1}(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$ ∎

c) Haga el bosquejo de f.

P3) Analice la función dada por $x \mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}}$ determinando:

(i) Dominio de f, signos de f y ceros de f.

- Dominio: Como es raíz, lo que esté dentro debe ser ≥ 0, pero antes, veamos donde se indefine lo de adentro

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}} \quad \text{Es decir} \quad \begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{matrix}$$

$$= \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \quad \text{Entonces, son 2 casos: } \left.\begin{matrix} ① \; x-2 \geq 0 & \wedge & x+1 > 0 \\ ② \; x-2 \leq 0 & \wedge & x+1 < 0 \end{matrix}\right\} \text{ para que esté bien definida la raíz.}$$

Caso 1: $x \geq 2 \;\wedge\; x > -1 \Rightarrow x \in [2, \infty)$

Caso 2: $x \leq 2 \;\wedge\; x < -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1)$

Entonces el $\text{Dom } f = (\infty, -1) \cup [2, \infty)$

- Signos: Notamos que la raíz siempre es positiva: $f(x) \geq 0$. Así

	Dom f
f	+

- Ceros: Sea $f(x) = 0$. Ya que quitamos $\{-1, 1\}$ del dominio entonces $\frac{x-1}{x-1} = 1 \;\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Así } f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{1 \cdot \frac{(x-2)}{(x+1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Entonces $\text{Ceros}(f) = \{2\}$.

(ii) Asíntotas verticales y horizontales, si las hay.

Ya que es una función racional (dentro de raíz) suponemos que hay asíntotas: Dado que $x-2$ tiene el mismo grado que $x+1$ entonces hay asíntota horizontal y viene dada por $\frac{a_n}{b_n}$ con a_n el número ver resumen DEF 12. que acompaña al x que da el grado del polinomio de arriba y b_n el de abajo. En este caso $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1} = 1$

Así $y = 1$ es asíntota horizontal.

Para la vertical será en aquellos valores de x en donde la fracción se indefine. En este caso será en $x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -1$, asíntota vertical.

OO: $x = 1$ NO ES asíntota pues no modifica a la función $\left(\forall x \neq 1 \;\; \frac{x-1}{x-1} = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \right)$

(iii) Intervalos donde f es decreciente y/o creciente.

Tomaremos $x_1, x_2 \in \text{Dom}\, f = (-\infty,-1) \cup [2,\infty)$ spg $x_1 < x_2$.

Notemos que $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}} = \sqrt{\dfrac{x+1-1-2}{x+1}}$

$$= \sqrt{1 - \frac{3}{x+1}}$$

Luego, creamos la función desde $x_1 < x_2$ para determinar su crecimiento.

$$x_1 < x_2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + 1 < x_2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x_2+1} < \frac{1}{x_1+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{3}{x_1+1} < -\frac{3}{x_2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{3}{x_1+1} < 1 - \frac{3}{x_2+1}$$

función $\sqrt{\cdot}$ (raíz) es creciente $\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-\dfrac{3}{x_1+1}} < \sqrt{1-\dfrac{3}{x_2+1}}$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Es decir, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ o sea, es creciente en los intervalos $(-\infty;1)$ y $[2,\infty)$.

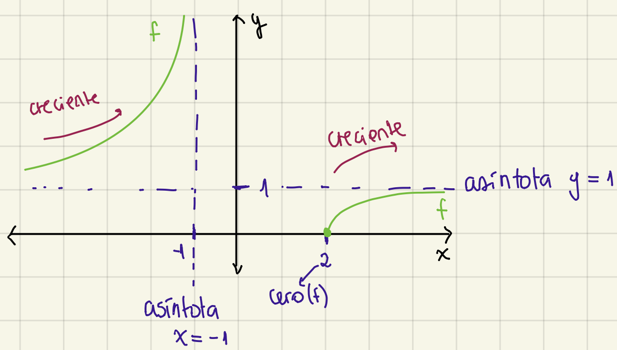
(iv) Conjunto imagen. Bosqueje el gráfico.

Recordemos que el conjunto imagen es: $\text{Im}\, f = \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in (-\infty,-1) \cup [2,\infty) \text{ tq } \sqrt{1-\frac{3}{x+1}} = y \right\}$

Como $y = \sqrt{\%}$ entonces $\text{Im}\, f \subseteq [0,\infty)$ (Lo tenemos por signo tmb). Sin embargo $y=1$ es ASINTOTA, es decir, $1 \notin \text{Im}\, f$.

Como en el resto del dominio no hay más indeterminaciones y solo es creciente dentro de la raíz, entonces podemos concluir que $\text{Im}\, f = [0,\infty) \setminus \{1\}$

Bosquejo :



P4 Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - |x|}$

a) Determine dominio, ceros, paridad y signos de f.

• Dominio: Dado que se indetermina cuando el denominador es 0, vemos qué números hay que sacar de los $\mathbb{R}$.

$$x^2 - |x| = 0$$

$\iff \quad x^2 = |x|$, por definición de módulo, nos ponemos en los casos correspondientes:

Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, así $x = x^2$ ssi $x = 0 \vee 1 = x$

si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, así $-x = x^2$ como $x \neq 0$ entonces $-1 = x$

Así el $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

• Ceros: Buscamos $x \in \text{Dom} f$ tq $f(x) = 0$

En efecto $\quad f(x) = 0$

$$\iff \frac{x}{x^2 - |x|} = 0$$

$$\iff x = 0,$$ 🚨 sin embargo $x \notin \text{Dom} f$, por lo tanto $\text{Ceros}(f) = \emptyset$.

• Paridad: Estudiemos $f(-x)$ con $x, -x \in \text{Dom} f$.

$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 - |-x|}$$

$$= -\frac{x}{x^2 - |x|}$$

$$= -f(x)$$

Así f es impar.

• Signos: Haremos la tablita usual con los puntos en donde el numerador o el denominador cambia de signo.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - \|x\|$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - \|x\|}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Si $x = -2 \Rightarrow x^2 - |x| = (-2)^2 - |-2| = 4 - 2 = 2 > 0$

Si $x = -0{,}5 \Rightarrow x^2 - |x| = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} < 0$

Así $f(x)$ es positiva en $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ y negativa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

b) Encuentre asíntotas de todo tipo de f.

Como se indefine el denominador en $\{-1, 0, 1\}$ entonces son CANDIDATOS a asíntotas. Para ser asíntotas el numerador no se debe anular. Es decir, $x=-1$ y $x=1$ son las asíntotas verticales pues $x=0$ anula la parte de arriba.

Para las horizontales hay que estudiar los grados del num. y denom. Notemos que para esto, es necesario que sean polinomios. Para esto nos deshacemos del valor absoluto poniendonos en casos:

$$x>0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow f(x)=\frac{x}{x^2-x}=\frac{1}{x-1} \quad \begin{matrix}\rightarrow \text{grado} = 0 \\ \rightarrow \text{grado} = 1\end{matrix}$$

Como $0<1$, entonces $y=0$ es asíntota horizontal.

$$\text{Si } x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow f(x)=\frac{x}{x^2-(-x)}=\frac{x}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}$$

y nos da la misma situación que el caso anterior.

c) Estudie crecimiento por intervalos de f.

Dado que tenemos los intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$. Por paridad, estudiaremos solo el lado positivo, es decir, $(0,1)$ y $(1,\infty)$.

Sean $x_1, x_2 \in (0,1)$ spg $0<x_1<x_2<1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-1}$ Entonces basta llegar a estudiar el crecimiento de esa función.

Así

$$0<x_1<x_2<1$$
$$-1<x_1-1<x_2-1<0 \qquad \text{OO: son negativos!}$$
$$1>1-x_1>1-x_2>0$$
$$0<\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2}<1$$
$$-1<\frac{1}{x_2-1}<\frac{1}{x_1-1}<0$$

Ojito con $(\ )^{-1}$ y números negativos en las desigualdades

$$\Rightarrow \frac{1}{x_2-1}<\frac{1}{x_1-1} \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$$, es decir es decreciente estricta en $(0,1)$. Como f es impar, tmb es decreciente estricta en $(-1,0)$

Ahora en el otro intervalo: $1<x_1<x_2$

$$1<x_1<x_2$$
$$\Rightarrow 0<x_1-1<x_2-1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x_2-1}<\frac{1}{x_1-1}$$

$\Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$, es decir, es decreciente estricta en $(1,\infty)$. $\Rightarrow$ decreciente estricta en $(-\infty,-1)$

Ojo: f NO es decreciente en TODO su dominio, solo por intervalos pues al tomar $x_1<-1<x_2<0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ es decir "creciente". Por eso la respuesta es por intervalos (y no es inyectiva necesariamente!)

d) Encuentre el conjunto imagen. Bosqueje su gráfico.

$$\operatorname{Im} f = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,1\} \text{ tq } \frac{x}{x^2-|x|} = y \right\}$$

Vemos primero la imagen en $(0,1) \cup (1,\infty)$ y se repite el argumento en el resto del dom. pues f impar.

Así buscamos $y = \dfrac{x}{x^2-x} = \dfrac{1}{x-1}$

si $y \neq 0 \Rightarrow 0 \notin \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \quad x-1 = \dfrac{1}{y}$

primer intervalo

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{y} + 1 \in (0,1) \qquad \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y} + 1 < 1$

$\dfrac{1}{y} \in (-1,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < \dfrac{1}{y} < 0$

$\Rightarrow y \in (-\infty,-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad y < -1$

Ahora segundo intervalo $\quad x \in (1,\infty)$

ssi $\dfrac{1}{y} + 1 \in (1,\infty) \qquad \Leftrightarrow \qquad \dfrac{1}{y} + 1 < 1$

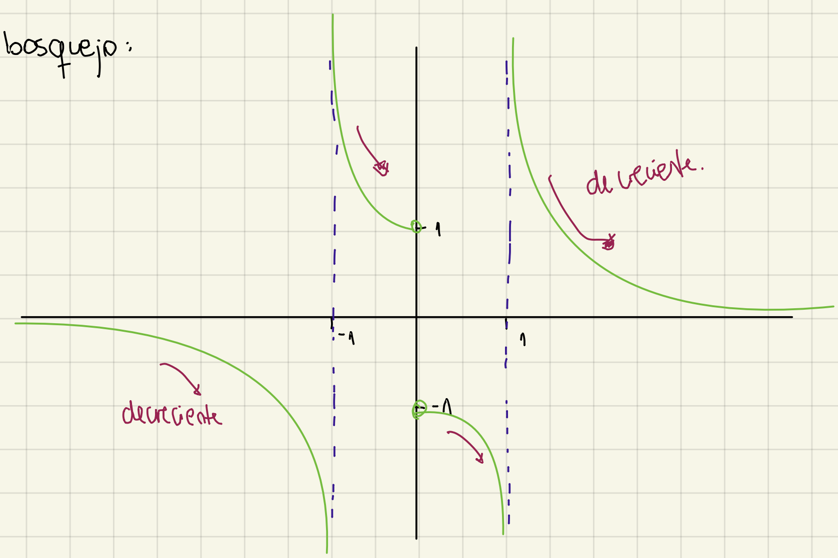
$\Rightarrow \dfrac{1}{y} \in (0,\infty) \qquad \Leftrightarrow \qquad \dfrac{1}{y} < 0$

$\Rightarrow y \in (0,\infty) \qquad \Leftrightarrow \qquad y < 0$

Luego, por paridad $\quad f((-\infty,-1)) = (-\infty,0)$
$\qquad f((-1,0)) = (1,\infty)$

Así $\quad \operatorname{Im} f = (-\infty,0) \cup (1,\infty) \cup (-1,\infty) \cup (0,\infty) = \mathbb{R} - \{0\}$

Y el bosquejo:



e) Estudie inyectividad. Encuentre mayor intervalo $B \subseteq \mathbb{R}$ tq $f|_B$ sea inyectiva. Calcule inversa.

Dominio = B

Claramente f no es inyectiva pues basta notar que $f((-\infty,0)) \supseteq f((0,1))$ por lo visto en d).

Luego, para encontrar B, basta notar que como f es impar, de inmediato nos quitamos los negativos del dominio. Así $B = (0,1) \cup (1,\infty)$. Es inyectiva pues es decreciente estricta en cada intervalo además de tener DISTINTO signo $\left(\begin{array}{ll} f(x) < 0 & \text{si } x \in (0,1) \\ f(x) > 0 & \text{si } x \in (1,\infty) \end{array} \right)$

Entonces, para que sea sobreyectiva, hacemos que su codominio sea $f(B) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Así que calculamos la inversa: como $x \in B \Rightarrow$

$$f(x) = y$$

$$\frac{1}{x-1} = y$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y}$$

Luego $f^{-1}(y): \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow B$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{y}.$$

P2) Sea $f(x) = x - \text{ent}(x)$. Con $\text{ent}(\cdot)$ la función truncamiento que se define de la siguiente manera:

$$\text{ent}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ p & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z} \quad \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tq } p < x < p+1 \\ p+1 & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z} \quad \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tq } p < x < p+1 \end{cases}$$

ejemplo: $\text{ent}(2.4) = 2$
$\text{ent}(-2.4) = -2$
$\text{ent}(2) = 2$
$\text{ent}(\pi) = 3$
$\text{ent}(\sqrt{2}) = 1$

a) Determine el dominio, el conjunto imagen, ceros, intersección con OY y paridad.

• Dominio: $\mathbb{R}$ pues no se indetermina en ningún punto.

• Conjunto imagen: Nos ponemos en los 3 casos que nos da la definición de f (pues ent(x) tiene 3 casos!)

CASO 1: $x \in \mathbb{Z}$, entonces $\text{ent}(x) = x$. Así $f(x) = x - x = 0 \Rightarrow 0 \in \text{Im} f$.

CASO 2: $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$ $\exists p \in \mathbb{Z}$ tq $p < x < p+1 \Rightarrow \text{ent}(x) = p$. Pero $f(x) = x - p \leftarrow$ Queremos estudiar esto!

Entonces, como $p < x < p+1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow p - p < x - p < p + 1 - p \\ &\Leftrightarrow 0 < x - p < 1 \\ &\Leftrightarrow x - p \in (0,1) \\ &\Leftrightarrow (0,1) \subseteq \text{Im } f. \end{aligned}$$

CASO 3: $x \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$, $\exists p \in \mathbb{Z}$ tq $p < x < p+1 \Rightarrow \text{ent}(x) = p+1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= x - (p+1) \\ &= x - p - 1 \end{aligned}$$

Nuevamente, sacamos de donde vive x y buscamos su imagen:

$$\begin{aligned} p &< x < p+1 \quad / -p-1 \\ p - p - 1 &< x - p - 1 < p + 1 - p - 1 \\ -1 &< x - p - 1 < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x - p - 1 \in (-1, 0)$$

Entonces la $\text{Im} f = \{0\} \cup (0,1) \cup (-1,0) = (-1,1)$

• Ceros: Como vimos en la imagen $f(x) = 0$ ssi $\text{ent}(x) = x$, ie. $x \in \mathbb{Z}$.
Luego $\text{Ceros}(f) = \mathbb{Z}$

• Intersección con eje OY: Esto es solo evaluar $x = 0$. $f(0) = 0 - \text{ent}(0)$
$= 0$

• Paridad: Evaluamos $f(-x) = (-x) - \text{ent}(-x)$. Sin embargo, qué es $\text{ent}(-x)$? Hay que analizarlo en los 3 casos.

① $x \in \mathbb{Z}$: $\text{ent}(-x) = -x \underset{\text{pues } \text{ent}(x) = x \text{ si } x \in \mathbb{Z}}{=} -\text{ent}(x)$

② $x\in\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Z}$: $\exists p\in\mathbb{Z}$ tq $p<x<p+1$ $\Rightarrow ent(x)=p$

Pero $-x\in\mathbb{R}^-\setminus\mathbb{Z}$, pero tenemos por lo siguiente $-p-1<-x<-p$

Como $-x\in\mathbb{R}^-\setminus\mathbb{Z}$, y $-p-1+1=-p$, es decir, está en el intervalo que usamos para sacar $ent(\cdot)$

O sea $-p-1<-x<-p\overbrace{-1+1}^{=0}$

$\Rightarrow ent(-x) \overset{\text{pues } -x\in\mathbb{R}^-\setminus\mathbb{Z}}{=} -p = -ent(x)$

↳ pues $x\in\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Z}$

③ $x\in\mathbb{R}^-\setminus\mathbb{Z}$: $\exists p\in\mathbb{Z}$ tq $p<x<p+1$ $\Rightarrow ent(x)=p+1$

$\Rightarrow -p-1<-x<-p$

Como $-x\in\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Z}$ $\Rightarrow ent(-x)=-p-1$ $=-(p+1)$
$=-ent(x)$

Es decir, en los 3 casos $ent(-x)=-ent(x)$ (impar)

Así $f(-x)=(-x)-ent(-x)$
$=-x-(-ent(x))$
$=-(x-ent(x))$
$=-f(x)$

Es decir, f es impar.

b) Bosquejo