Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-9 Introducción al Cálculo
23 de abril de 2025

Auxiliar 5: Funciones

Profesor: Álvaro Hernández U.
Auxiliares: Luis Fuentes Cruz y Antonia Suazo Ruiz

P1. Sea $x \mapsto f(x) = x|x|$.

a) Determine el dominio, ceros, paridad, signos y crecimiento de la función.
b) Determine inyectividad, sobreyectividad y calcule la inversa si corresponde.
c) Haga el bosquejo del gráfico de f.

P2. Sea $f(x) = x - \text{ent}(x)$, con $\text{ent}(x)$ la función "truncamiento", la cual se define de la siguiente manera:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \text{ent}(x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z} \quad \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tal que } p < x < p+1 \Rightarrow \text{ent}(x) = p$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z} \quad \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tal que } p < x < p+1 \Rightarrow \text{ent}(x) = p+1$$

a) Determine el dominio, conjunto imagen, ceros, intersección con el eje y, paridad.
b) Haga el bosquejo del gráfico de f.
c) **[Propuesto]** Considere $g : \text{Dom }(f) \cap \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, demuestre que tiene

$$\forall x \in \text{Dom}(g), \quad g(x+n) = g(x)$$

P3. **[C3 P2) a. 2014-1]** Analice la función dada por $x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}}$ determinando:

(i) Dominio de f, signos de f y ceros de f.
(ii) Asíntotas horizontales y verticales, si las hay.
(iii) Intervalos donde f es creciente y/o decreciente.
(iv) Conjunto imagen. Bosqueje el gráfico de f.

P4. Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2-|x|}$

a) Determine dominio, ceros, paridad y signos de f.
b) Encuentre asíntotas de todo tipo de f.
c) Estudie crecimiento por intervalos de f.
d) Encuentre el conjunto imagen de f. Bosqueje su gráfico.
e) Estudie inyectividad de f y encuentre el mayor intervalo $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f|_B$ sea inyectiva. Calcule su inversa explícitamente.

Resumen

Obs. Recomiendo fuertemente el material del profe :).
Notación. Sean, $A, B \neq \varnothing$ conjuntos. Se define como **función** a f tal que esté descrita de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Donde:

- A se le llama **dominio**.
- B se le llama **codominio**.
- x es la **variable independiente**.
- f es la **función**.

Se asumirá de aquí en adelante que $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Definición 1. Llamaremos *ceros* de f a todos los reales de su dominio tales que $f(x) = 0$. En estos puntos el gráfico de f corta al eje OX.
Definición 2. Llamaremos *conjunto imagen* de f al conjunto definido por

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Definición 3. Diremos que f es una *función par* si $\forall x \in A, -x \in A$ y $f(-x) = f(x)$.
Definición 4. Diremos que f es una *función impar* si $\forall x \in A, -x \in A$ y $f(-x) = -f(x)$.
Definición 5. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$. Diremos que f es

- *creciente en* B si $\forall x_1, x_2 \in B,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- *decreciente en* B si $\forall x_1, x_2 \in B,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Si f es creciente o decreciente, diremos que f es *monótona.*
Definición 6. Diremos que f es

- *acotada inferiormente* si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathrm{Dom}(f),\ f(x) \geq a$.
- *acotada superiormente* si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathrm{Dom}(f),\ f(x) \leq b$.
- *acotada* si $\exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f),\ a \leq f(x) \leq b$.

Proposición 1. *f es acotada si y solo si existe $M > 0$ tal que $\forall x \in \mathrm{Dom}(f),\ |f(x)| \leq M$.*
Definición 7. Sea $B \subset A$. Se llama *restricción* de f a B a la función $f_{|B}$ definida por $f_{|B} : B \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in B,\ f_{|B}(x) = f(x)$.
Definición 8. Sean f, g funciones con dominio D_f y D_g, respectivamente, y sea $A \in \mathbb{R}$, se definen

- *Función suma.* $f + g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D_f \cap D_g,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- *Función diferencia.* $f - g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D_f \cap D_g,\ (f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
- *Función producto.* $f \cdot g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D_f \cap D_g,\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- *Función cociente.* $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ donde $A = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$.

Definición 9. *Las funciones polinómicas* son de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Definición 10. *Las funciones racionales* son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$, donde P y Q son polinomios.
Definición 11. Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional. Si $x_1, \ldots, x_r$ son ceros de $Q(x)$ pero no de $P(x)$, entonces las rectas verticales $x = x_1, \ldots, x = x_r$ se llaman *asíntotas verticales* de f.
Definición 12. Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$ una función racional. Si $n = m$, entonces la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ es una *asíntota horizontal* de f, y si $n < m$, la asíntota horizontal es $y = 0$.
Definición 13. Sean f, g funciones. Se define la *composición* $g \circ f$ por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, donde

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}.$$

Definición 14. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathrm{Cod}(f)$. Diremos que

- f es *inyectiva* si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f es *sobreyectiva* si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Cod}(f)$.
- f es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Definición 15. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathrm{Cod}(f)$ una función biyectiva. Se define la *función inversa* de f como la función $f^{-1} : \mathrm{Cod}(f) \to A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Definición 16. Diremos que f es *periódica* ssi existe $p \in \mathbb{R}^+$ tal que:

- $(\forall x \in A)\ x + p \in A$
- $(\forall x \in A)\ f(x + p) = f(x)$

En este caso, p se llama *período* de la función.