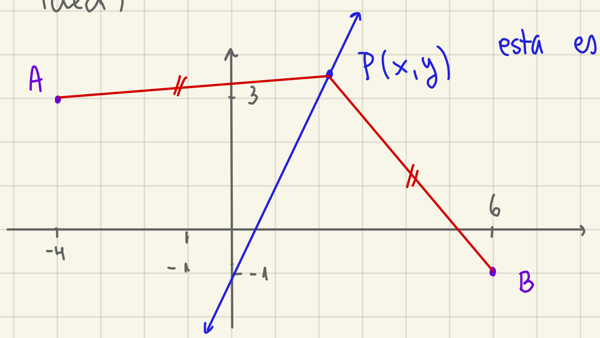
pauta aux 3

P1 Determinar la ecuación general de la simetral de $A(-4,3)$ y $B(6,-1)$

Solución: Buscamos encontrar la siguiente recta (esto es solo para darnos una idea):



esta es la simetral

Es decir, debemos encontrar la ecuación de aquella recta tq TODO PUNTO perteneciente a ella, está a la misma distancia de A y de B.

Entonces, empezamos con la demostración: Sea $\mathcal{L}$ la simetral de A y B.
Se debe cumplir $\forall x,y \in \mathcal{L}$:

$$d\big((x,y),\, A(-4,3)\big) = d\big((x,y),\, B(6,-1)\big)$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2}$$

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + (y+1)^2$$

$$\cancel{x^2} + 16 + 8x + \cancel{y^2} + 4 - 4y = \cancel{x^2} + 36 - 12x + \cancel{y^2} + 1 + 2y$$

$$20x - 2y + 20 - 37 = 0$$

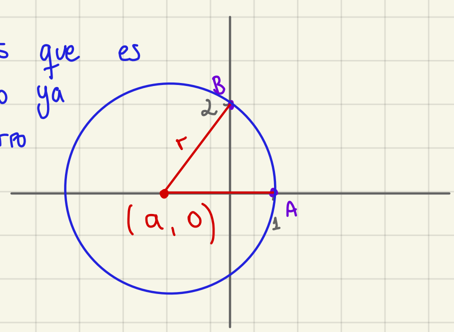
Que es la ecuación general de la recta con

$A = 20$
$B = -2$
$C = 20 - 37$

P2 Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en el eje OX, que pasa por los puntos $A(1,0)$ y $B(0,2)$. Indique claramente el radio y la ubicación del centro en un gráfico esquemático.

Solución: Nuevamente, hagamos un bosquejo de la situación para entender mejor lo que nos piden:

Sabemos que es para este lado ya que el centro está en el eje x por el enunciado.



Pero, ¿qué nos falta saber para identificar una circunferencia?

Respuesta: ① Radio: $r>0$
② Coordenadas del centro: $(a, 0)$

Entonces, encontremos estas 2 incógnitas. Sabemos que se debe cumplir lo siguiente: $\mathcal{C}$ la circunferencia

$$\forall (x,y) \in \mathcal{C} \qquad (x-a)^2 + (y-0)^2 = r^2 \iff (x-a)^2 + y^2 = r^2$$

Probamos con lo que tenemos. $\underbrace{A \in \mathcal{C}}_{①} \wedge \underbrace{B \in \mathcal{C}}_{②}$.

$$\left.\begin{array}{ll} ① & (1-a)^2 = r^2 \\ \iff & 1 + a^2 - 2a = r^2 \\ & \\ ② & (0-a)^2 + 2^2 = r^2 \\ \iff & a^2 + 4 = r^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1 + \cancel{a^2} - 2a = \cancel{a^2} + 4 \\ 2a = -3 \\ \boxed{a = \frac{-3}{2}} \end{array}$$

Reemplazamos $a = \frac{-3}{2}$ en ② para encontrar r.

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 4 = r^2$$

$$\iff \quad 3^2 + 4^2 = (2r)^2$$

trio pitagórico 3, 4, 5 entonces $2r = 5$

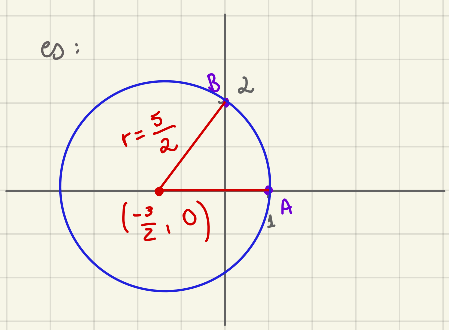
$r = \frac{5}{2}$

Así la circunferencia está dada por $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

Centro: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Radio: $\frac{5}{2}$

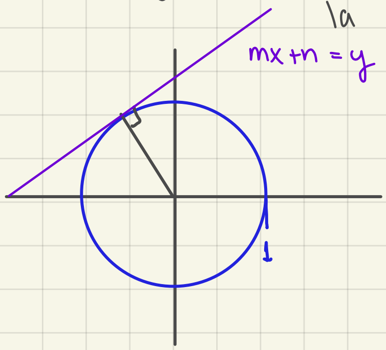
Y el esquema es:



P3) Considere $\mathcal{C}$ la circunferencia centrada en el origen y radio 1. Además $\mathcal{L}: y = mx+n$ con $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Demuestre que si la recta $\mathcal{L}$ es tangente a la circunferencia $\mathcal{C}$, entonces $n^2 - m^2 = 1$

Solución: 🗣️🗣️ Sorpresa, vamos a dibujar de nuevo, pero esta vez será estrictamente referencial ya que no hay muchos datos concretos. Lo único verdaderamente cierto, es la circunferencia.



Entonces, las ecuaciones que tenemos son:

$$\mathcal{C}: \; x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad \mathcal{L}: \; mx + n = y$$

Ya que $\mathcal{L}$ es tangente a $\mathcal{C}$, se intersectan en un solo punto. Lo llamaremos (x_0, y_0), el cual cumple que

$$\{(x_0, y_0)\} = \mathcal{C} \cap \mathcal{L}$$

Es decir, este punto cumple con las dos ecuaciones que tenemos.

Así
$$\left.\begin{aligned} m x_0 + n &= y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; x_0^2 + (m x_0 + n)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \; x_0^2 + m^2 x_0^2 + n^2 + 2m x_0 n - 1 = 0$$
$$x_0^2 (1 + m^2) + x_0 \cdot 2mn + n^2 - 1 = 0$$

Es decir, hemos llegado a una cuadrática, pero solo puede tener una solución real. Sabemos que esto queda representado por el DISCRIMINANTE, cuando es igual a 0. Matcaqueamos

$$\begin{aligned}
& \Delta = 0 \\
\Leftrightarrow \; & b^2 - 4ac = 0 \\
\Leftrightarrow \; & (2mn)^2 - 4(1+m^2)(n^2-1) = 0 \\
\Leftrightarrow \; & 4m^2n^2 - (4 + 4m^2)(n^2 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow \; & 4m^2n^2 - (4n^2 - 4 + 4m^2n^2 - 4m^2) = 0 \\
\Leftrightarrow \; & \cancel{4m^2n^2} - 4n^2 + 4 - \cancel{4m^2n^2} + 4m^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \; & \cancel{4} = \cancel{4}n^2 - \cancel{4}m^2 \\
\Leftrightarrow \; & 1 = n^2 - m^2 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

P4 Considere dos circunferencias, ξ_1, ξ_2. La primera tiene su centro en el origen y un radio de 1, mientras que la segunda tiene su centro en $(2,1)$ y un radio r. Demuestre que si $1+r=\sqrt{5}$, entonces ξ_1 y ξ_2 tienen exactamente un punto de intersección.

Solución: Ahora sin dibujar, porque como queremos llegar a un punto de intersección, se nos ocurre (👊) querer llegar a un discriminante y ver si es 0.

En efecto, las ecuaciones que tenemos son:

$$\text{①}\ \xi_1: \quad x^2+y^2=1$$
$$\text{②}\ \xi_2: \quad (x-2)^2+(y-1)^2=r^2$$

Por enunciado tenemos que

$$1+r=\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow r=\sqrt{5}-1$$
$$\Rightarrow r^2=5+1-2\sqrt{5}=6-2\sqrt{5}=2(3-\sqrt{5})$$

Y lo reemplazamos en ② con (x_0,y_0) algún punto tal que $\{(x_0,y_0)\}\in\xi_1\cap\xi_2$

$$(x_0-2)^2+(y_0-1)^2=6-2\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow x_0^2+4-4x_0+y_0^2+1-2y=6-2\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{x_0^2+y_0^2}_{=1 \text{ por } \xi_1}-4x_0-2y_0=1-2\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{1}-4x_0-2y_0=\cancel{1}-2\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow y_0=\sqrt{5}-2x_0 \qquad \star$$

Reemplazamos en ξ_1:

$$x_0^2+(\sqrt{5}-2x_0)^2=1$$
$$\Leftrightarrow x_0^2+5+4x_0^2-4\sqrt{5}x_0-1=0$$
$$\Leftrightarrow 5x_0^2-4\sqrt{5}x_0+4=0$$

Veamos cuántas soluciones hay para x_0, entonces sacamos su discriminante:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &=(4\sqrt{5})^2-4\cdot5\cdot4\\ &=4^2\cdot5-4^2\cdot5\\ &=0\end{aligned}$$

Es decir, solo tiene una solución para x_0. Falta ver que solo nos de una solución de y_0, tanto en ξ_1 como en ξ_2. Para esto haremos lo mismo, pero despejando y_0 en $(\star)$.

☆ $\Leftrightarrow$ $2x_0 = \sqrt{5} - y_0$

$$x_0 = \frac{\sqrt{5} - y_0}{2}$$

Reemplazamos en $\mathscr{C}_1$:

$$\left(\frac{\sqrt{5} - y_0}{2}\right)^2 + y_0^2 = 1$$

$$5 + y_0^2 - 2\sqrt{5}y_0 + 4y_0^2 = 4$$

$$5y_0^2 - 2\sqrt{5}y_0 + 1 = 0$$

Y su discriminante está dado por :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = 0 \end{aligned}$$

Es decir, solución única tanto para x_0, como para y_0, luego $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{(x_0, y_0)\}$. ∎