Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-9 Introducción al Cálculo
9 de abril de 2025

Auxiliar 3: Geometría Analítica

Profesor: Álvaro Hernández U.
Auxiliar: Luis Fuentes Cruz y Antonia Suazo Ruiz

Resumen

Definición 1. Sean dos puntos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Su **distancia** queda dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Definición 2. La **ecuación de la circunferencia** con radio $r > 0$ y centro $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ viene dada por:

$$\mathcal{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Definición 3. La **ecuación general de la recta** con $A, B, C \in \mathbb{R}$ viene dada por:

$$\mathcal{L} : Ax + By + C = 0$$

Definición 4. La **ecuación principal de la recta** con $m, n \in \mathbb{R}$ viene dada por:

$$\mathcal{L} : y = mx + n$$

Definición 5. Dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ distintos, llamamos **simetral** de P y Q, a la recta $L \subseteq \mathbb{R}^2$ que satisface

$$(x,y) \in L \iff d(P,(x,y)) = d(Q,(x,y)).$$

Definición 6. Dos rectas L y L' son **paralelas** (denotado $L \parallel L'$) si $L = L'$ o bien $L \cap L' = \emptyset$.

Definición 7. Dos rectas L y L' son **perpendiculares** u ortogonales (denotado $L \perp L'$), si para todo par de puntos $P, Q \in L$, $P \neq Q$, la simetral entre P y Q es paralela a L'.

Proposición 1. Sean L y L' dos rectas. Entonces $L \perp L'$ si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface:

- L es horizontal y L' es vertical.
- L es vertical y L' es horizontal.
- L y L' son oblicuas con pendientes m_L y $m_{L'}$ respectivamente, y $m_L \cdot m_{L'} = -1$.

P1. Determine la ecuación general de la simetral de $A(-4,3)$ y $B(6,-1)$.

P2. **[Control 2024-1 P2.b)]**

Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en el eje OX, que pasa por los puntos $A(1,0)$ y $B(0,2)$. Indique claramente el radio y la ubicación del centro en un gráfico esquemático.

P3. Considere C la circunferencia centrada en el origen y radio 1. Además, la recta $L : y = mx + n$ con $n, m \in \mathbb{R}$.

a) Demuestre que si la recta L es tangente a la circunferencia C entonces $n^2 - m^2 = 1$.

b) **[Propuesto]** Pruebe que para cualquier recta $L : Ax + By + C = 0$ con $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, y un punto arbitrario $P(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $P \notin L$, entonces su distancia está determinada por la siguiente ecuación:

$$\text{dist} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Y utilícelo para probar a).

P4. Considere dos circunferencias, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. La primera tiene su centro en el origen y un radio de 1, mientras que la segunda tiene su centro en $(2,1)$ y un radio r. Demuestre que si $1 + r = \sqrt{5}$, entonces $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen exactamente un punto de intersección.