

pauta aux 1

Pl Usando solo axiomas de cuerpo y los de unicidad de inv. y neutro:

a) Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que $a \cdot 0 = 0$

DEM. Como solo podemos usar axiomas de cuerpo y los teos, para demostrar esta igualdad usaremos la "técnica" de llegar al lado derecho justificando cada paso con las instrucciones dadas.

En efecto, dado que $a \in \mathbb{R}$ y $0 \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot 0 \in \mathbb{R}$, así:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{Ax neutro +} \\ &= a \cdot 0 + (a - a) && \text{Ax inverso + pues } a \in \mathbb{R} \\ &= a \cdot 0 + (a \cdot 1 - a) && \text{Ax neutro \cdot} \\ &= (a \cdot 0 + a \cdot 1) - a && \text{Ax asociatividad} \\ &= a(0 + 1) - a && \text{Ax distribución} \\ &= a \cdot 1 - a && \text{Ax neutro +} \\ &= a - a && \text{Ax neutro \cdot} \\ &= 0 && \text{Ax inverso +} \end{aligned}$$

Entonces, gracias a los axiomas de cuerpo y que tomamos $a \in \mathbb{R}$ cualquiera, hemos probado que:

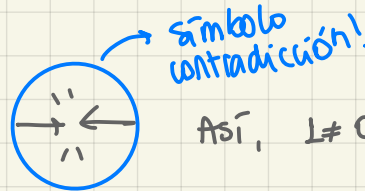
$$a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

a.1) Deduzca que $0 \neq 1$

DEM. Lo haremos por contradicción. Supongamos que $0=1$.
Entonces tendríamos lo siguiente: Sea $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0 \\ &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\text{Ax neutro} \quad 0=1 \quad \text{Pl. a)} \end{aligned}$$

Es decir $\forall a \in \mathbb{R} \quad a=0 \Rightarrow \mathbb{R} = \{0\}$



b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que $a(-b) = -ab$

DEM. En este caso, vamos a lograr hacer la demostración llegando desde el lado derecho al izquierdo.

La intuición detrás de esto, es que " $-ab$ " es un objeto que sí sabemos definir, ya que es el objeto tal que es el inverso aditivo de ab .

Es decir,

$$ab + (-ab) = 0$$

→ esto es algo que sabemos porque "ab" se interpreta como un número u objeto, no así a(-b) que es la multiplicación de a por el opuesto de b.

Otra cosa que sabemos, esta vez por enunciado, y es que: gracias al teo. de unicidad de inversos, todo aquel objeto que cumpla con ser inverso de ab, debe cumplir con ser idéntico a (-ab).

Con estas dos cosas en mente, sean $a, b \in \mathbb{R}$, vamos a probar que

$$[ab + a(-b) = 0]$$

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } ab + a(-b) &= a(b + (-b)) \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ax. distribución

Ax. inverso +

$a \cdot 0 = 0$ si $a \in \mathbb{R}$ por $\forall a$

Hemos probado que $ab + a(-b) = 0 \quad \therefore$

Entonces, como los inversos aditivos son únicos por teorema, podemos concluir que:

$$a(-b) = -ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

b.1) Deduzca que $(-a)b = a(-b)$

DEM. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} (-a)b &= b(-a) \\ &= -ba \\ &= -ab \\ &= a(-b) \end{aligned}$$

Ax conmutatividad

como es de la forma $x(-y)$, usamos $\forall b$

$\otimes$

$\forall b \quad (-xy = x(-y))$

La forma de justificar $\otimes$ es por definición de inverso, conmutatividad y teo. de unicidad de inv.:

$$ab = ba \quad \text{Ax conmutatividad}$$

Entonces, sus inversos son el mismo por ser único (teo), es decir: $-ab = -ba$

c) Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demuestre que $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

DEM. Como $(ab)^{-1}$ es el inverso mult. de ab, veamos que $b^{-1} \cdot a^{-1}$ también lo es para concluir por teo de unicidad. (Igual que antes)

En efecto, sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} ab(b^{-1}a^{-1}) &= a(b \cdot b^{-1})a^{-1} \\ &= a \cdot 1 \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

Ax asociatividad

Ax inverso $b \neq 0$

$$\begin{aligned}
 &= (a \cdot 1) \cdot a^{-1} \\
 &= a \cdot a^{-1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Ax asociatividad
 Ax neutro ·
 Ax inverso · $a \neq 0$

$$\text{Así } ab(b^{-1}a^{-1}) = 1 \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Luego, por teo de unicidad de inversos $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ■

P2 Usando axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$ y teos de unicidad de inv. y neutro y la prop. de $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a$.
 Demuestre que $\forall a \neq 0 \quad (-a^{-1}) + 1 \cdot a = a + (-1)$

DEM. Vamon a partir del lado izquierdo, y con solo cosas demostradas o axiomas llegaremos al lado derecho.

En efecto, sea $a \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 (-a^{-1}) + 1 \cdot a &= (-a^{-1}) \cdot a + 1 \cdot a \\
 &= a(-a^{-1}) + a \cdot 1 \\
 &= -a(a^{-1}) + a \cdot 1 \\
 &= (-1) + a \cdot 1 \\
 &= a + (-1)
 \end{aligned}$$

Ax distribución

Ax conmutatividad

$$\text{P1.b } x(-y) = -xy$$

Ax inverso mult

Ax conmutatividad y
 Ax neutro aditivo

$$\text{Así } (-a^{-1}) + 1 \cdot a = a + (-1) \quad \forall a \neq 0$$

OO. Este ejercicio usa $a \cdot 0 = 0$ en la demostración hecha en P1.b, por eso es parte del enunciado!

P3 Usando solo axiomas de cuerpo y teos de unicidad.
 Demuestre que si existiera $a \neq 0$ tq $a+a=0$, entonces se concluiría que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x+x=0$$

DEM. Para demostrar esto, notemos que info valiosa nos da la hipótesis del enunciado junto a los axiomas:

$$\begin{aligned}
 \text{Sea } a \neq 0 : \quad 0 &= a+a \\
 &= a \cdot 1 + a \cdot 1 \\
 &= a(1+1)
 \end{aligned}$$

Hipótesis
 Ax neutro mult
 Ax distribución

$$\text{Como } a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Ax comm}}}{aa^{-1}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Ax inv.}}}{a^{-1}a} = 1$$

Como $\bar{a}' \in \mathbb{R}$, $0 \cdot \bar{a}' = \bar{a}' \cdot 0 = 0$

$\downarrow$ Ax. comm $\downarrow$ P1a.

Ax $\bar{a}' \cdot 0 = \bar{a}' \cdot a (1+1)$

$\Leftrightarrow 0 = 1(1+1)$ Ax inv.

$\Leftrightarrow 0 = 1+1$ Ax neutro

Entonces $1+1=0$

Luego, sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, entonces:

$x+x = x \cdot 1 + x \cdot 1$ Ax neutro
 $= x(1+1)$ Ax dist.
 $= x \cdot 0$ $1+1=0$
 $= 0$ $a \cdot 0 = 0$ si $a \in \mathbb{R}$

Por lo tanto $\forall x \in \mathbb{R} \quad x+x=0$ si $\exists a \neq 0$ tq $a+a=0$.

P4 Utilizando axiomas de orden. Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

i) Demuestra que $a^2 + u^2 \geq -2au$

DEM. Notemos que ya no hay que justificar con los axiomas de cuerpo!

En efecto, $a^2 + u^2 \geq -2au$

$\Leftrightarrow a^2 + 2au + u^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a+u)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ Verdadero o falso?

Veamos si efectivamente $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces,

o conector lógico
"implica"

$(x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \vee (x=0) \vee ((-x) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$

Ax tricotomía

$\Rightarrow (x \cdot x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \vee (x \cdot x = 0) \vee ((-x)(-x) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$

Ax clausura

$\Rightarrow x^2 > 0 \vee x^2 = 0 \vee x^2 > 0$

$\Rightarrow x^2 \geq 0$

Así, como $a+u \in \mathbb{R} \Rightarrow (a+u)^2 \geq 0$

i) Demuestre que si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $u^2 + v^2 + w^2 = 3$ entonces

$$-2 \leq au + bv + cw$$

DEM. Para esto podemos utilizar i) ya que $a, b, c, u, v, w \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} -2au &\leq a^2 + u^2 \\ -2bv &\leq b^2 + v^2 \\ -2cw &\leq c^2 + w^2 \end{aligned}$$

Como las 3 desigualdades son verdaderas, sumarlas no altera el orden.

$$-2(au + bv + cw) \leq \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{=1} + \underbrace{u^2 + v^2 + w^2}_{=3}$$

$$\Rightarrow -2(au + bv + cw) \leq 4$$

$$\Rightarrow -4 \leq 2(au + bv + cw)$$

$$-2 \leq au + bv + cw \quad \blacksquare$$

P5 Demuestre que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $a \neq b$ cumple:

$$a^4 + b^4 > a^3b + ab^3$$

DEM. Vamos a partir de lo que nos piden demostrar utilizando solo equivalencias, y si llegamos a algo verdadero, quedaría probado lo pedido.

En efecto, sean $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ con $a \neq b$

$$\begin{aligned} a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 &= a^3(a-b) - b^3(a-b) \\ &= (a-b)(a^3 - b^3) \\ &= (a-b)(a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= \underbrace{(a-b)^2}_{\text{como } a \neq b} \underbrace{(a^2 + ab + b^2)}_{\text{como } a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \text{ por ax de clausura } a^2 + ab + b^2 > 0} \end{aligned}$$

como $a \neq b$
 $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
y por P4
 $(a-b)^2 > 0$

como $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, por ax de clausura $a^2 + ab + b^2 > 0$

Entonces $(a-b)^2(a^2 + ab + b^2) > 0$ por Ax de clausura.

$$\text{Así, } a^4 + b^4 > a^3b + ab^3 \quad \blacksquare$$