

Auxiliar 1: Axiomas de Cuerpo y Orden
Profesor: Álvaro Hernández U.
Auxiliar: Luis Fuentes Cruz y Antonia Suazo Ruiz

Resumen: Axiomas en los $\mathbb{R}$

Def. (Axioma): Regla que se asume como verdad sin necesidad de demostrarla.

Axiomas de Cuerpo:

1. Axioma 1. (Conmutatividad)

- a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = y + x$
- b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y = y \cdot x$

2. Axioma 2. (Asociatividad)

- a) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

- b) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

3. Axioma 3. (Distributividad)

- a) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

4. Axioma 4. (Elementos Neutros)

- a) Existe 0 tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,
 $x + 0 = x$
- b) Existe $1 \neq 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,
 $x \cdot 1 = x$

5. Axioma 5. (Inversos)

- a) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $-x$ tal que
 $x + (-x) = 0$
- b) Para cada $x \neq 0$ existe x^{-1} tal que
 $x \cdot x^{-1} = 1$

Axiomas de Orden:

6. Axioma 6. (de la tricotomía)

Para todo $x \in \mathbb{R}$, una y solo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

- a) $x \in \mathbb{R}_+^*$
- b) $(-x) \in \mathbb{R}_+^*$
- c) $x = 0$

7. Axioma 7. (Clausura)

Para todo $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ se cumple que:

- a) $(x + y) \in \mathbb{R}_+^*$
- b) $x \cdot y \in \mathbb{R}_+^*$

Es decir, $\mathbb{R}_+^*$ es cerrado para la suma y el producto.

P1. Primeros grandes pasos. Usando solo axiomas de cuerpo y teoremas de unicidad de inverso y neutro:

- a) Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que $a \cdot 0 = 0$
 - 1) Deduzca que $0 \neq 1$.
- b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que $a(-b) = -ab$.
 - 1) Deduzca que $(-a)b = a(-b)$.
- c) Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demuestre que $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

P2. [Control 2023-1 P1.a)] Usando los axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos, y la propiedad $a \cdot 0 = 0$, demuestre que:

$$\forall a \neq 0, \quad (- (a^{-1}) + 1) \cdot a = a + (-1).$$

Si necesita alguna propiedad adicional, **debe demostrarla**.

P3. [Control 2016] Usando sólo los axiomas de cuerpo y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre que si existiera $a \neq 0$ tal que $a + a = 0$, entonces se concluiría que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + x = 0$$

P4. Nos ordenamos. Utilizando axiomas de orden. Sean a, b, c, u, v, w reales:

(i) Demuestre que $a^2 + u^2 \geq -2au$

(ii) **[Propuesto]** Demuestre que si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $u^2 + v^2 + w^2 = 3$ entonces

$$-2 \leq au + bv + cw$$

P5. Usando los axiomas de orden, demuestre que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, a \neq b$ se cumple:

$$a^4 + b^4 > a^3b + ab^3$$