Pauta Auxiliar 1. otoño 2025 Sec 8.

|| P1 ||

(a) $\forall x,y \in \mathbb{R}$; $-((-x)+y) = x+(-y)$

Debemos probar que "$(-x)+y$" es el inverso Aditivo de $x+(-y)$, es decir, lo que tenemos que demostrar es equivalente a probar: $((-x)+y) + (x+(-y)) = 0$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
[(-x)+y] + [x+(-y)] &= [(-x)+y] + [(-y)+x] && / \text{ Ax. Conmuta.} \\
&= \big[[(-x)+y] + (-y)\big] + x && / \text{ Ax. Asociativi.} \\
&= [(-x) + (y+(-y))] + x && / \text{ Ax. Asociatividad} \\
&= [(-x) + 0] + x && / \text{ Inverso Aditivo.} \\
&= (-x) + x && / \text{ Neutro Aditivo} \\
&= 0 && / \text{ Inverso Aditivo.}
\end{aligned}$$

Para Concluir, por Conmutatividad también tenemos que $[x+(-y)] + [(-x)+y] = 0$, Además por teorema de unicidad, el inverso Aditivo es unico, por lo tanto efectivamente existe la igualdad:

$$-((-x)+y) = x+(-y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$, se utiliza el mismo metodo anterior. Veamos que $(-x)^{-1}$ es inv. Aditivo de (x^{-1}).

Utilizamos un "truco" recurrente, multiplicar por 1 o sumar un 0

$$\begin{aligned}
x^{-1} + (-x)^{-1} &= x^{-1}\cdot 1 + 1\cdot(-x)^{-1} && / \text{ Ax. Neutro multi. y Ax. Conmutatividad} \\
&= x^{-1}\cdot(-x)(-x)^{-1} + 1\cdot(-x)^{-1} && / \text{ Ax. inverso multi.} \\
&= (x^{-1}\cdot(-x))\cdot(-x)^{-1} + 1\cdot(-x)^{-1} && / \text{ Ax. Asociati.} \\
&= (x^{-1}\cdot(-x) + 1)\cdot(-x)^{-1} && / \text{ Ax. Distributi.} \\
&= (x^{-1}\cdot(-x) + x^{-1}\cdot x)\cdot(-x)^{-1} && / \text{ Ax. inverso multi.} \\
&= x^{-1}\cdot[(-x)+x]\cdot(-x)^{-1} && / \text{ Ax. distributi.} \\
&= x^{-1}\cdot[0]\cdot(-x)^{-1} && / \text{ Ax. inverso Aditivo}
\end{aligned}$$

Nos faltaría probar que $a\cdot 0 = 0 \;\; \forall a \in \mathbb{R}$ para poder Concluir la demostración. pues solo se permite inicialmente utilizar (Enunciado) Axiomas y unicidad de neutros e inversos.

<u>Dem</u>:

$$\left.\begin{aligned}
a\cdot 0 &= a\cdot 0 + 0 && / \text{ Ax. Neutro Aditivo} \\
&= a\cdot 0 + (a\cdot 0) + (-(a\cdot 0)) && / \text{ Ax. Inverso Aditivo} \\
&= a\cdot(0+0) + (-(a\cdot 0)) && / \text{ Ax. distributi.} \\
&= a\cdot 0 + (-(a\cdot 0)) && / \text{ Ax. Neutro Aditivo} \\
&= 0 && / \text{ Ax. inverso Aditivo}
\end{aligned}\right\} \text{Propiedad Absorción del 0}$$

Continuando, $\quad x^{-1}\cdot[0]\cdot(-x)^{-1} = (x^{-1}\cdot 0)\cdot(-x)^{-1}$ / Ax. Asociatividad

$= 0\cdot(-x)^{-1}$ / Propiedad

$= (-x)^{-1}\cdot 0$ / Ax. Conmutatividad.

finalmente, $\quad = 0$ / Propiedad

$x^{-1}+(-x)^{-1} = 0$. Por Conmutatividad $(-x)^{-1}+x^{-1} = 0$. Entonces $(-x)^{-1}$ es el inverso Aditivo de x^{-1}, como por teorema los inversos son unicos se concluye que $-(x)^{-1} = (-x)^{-1}$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(d) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $\quad x+y=0 \wedge x+z=0 \Rightarrow y=z$

Nuestras Hipotesis son, $\quad$ (1) $x+y=0$ $\quad$ (2) $x+z=0$ $\quad$, Por Conmutatividad tambien: Vamos a tener que $\quad y+x = x+y = 0$ $\quad z+x = x+z = 0$

Luego, tenemos que y es inverso Aditivo de x, tambien z será inverso aditivo de x.
Por teorema de unicidad de inversos Aditivos se debe cumplir necesariamente que $y=z$.

(e) Si $x^2=0 \Rightarrow x=0$. utilizaremos Contradicción.

Supongamos que $x\neq 0$, Además tenemos la Hipotesis $x^2=0$, es decir

$$x^2 = x\cdot x = 0 \quad /\cdot\, x^{-1}\cdot x^{-1}$$

$\leftarrow$ esto es posible solo si $x\neq 0$

$$x\cdot x\cdot x^{-1}\cdot x^{-1} = 0\cdot x^{-1}\cdot x^{-1}$$

$$x\cdot(x\cdot x^{-1})\cdot x^{-1} = (0\cdot x^{-1})\cdot x^{-1} \quad \text{/Ax. Asociati.}$$

$$x\cdot 1\cdot x^{-1} = (x^{-1}\cdot 0)\cdot x^{-1} \quad \text{/ Ax. inverso multi y Ax. Conmuta.}$$

$$x\cdot x^{-1} = 0\cdot x^{-1} \quad \text{/ Ax. neutro multi}$$

$$1 = 0 \quad \text{/ Ax. inverso multi., Propiedad Absorción Cero}$$

$\times$ Contradicción pues $1\neq 0$

Por lo tanto lo que supusimos inicialmente (que $x\neq 0$) es falso (lo tiene que ser porque llegamos a una contradicción), entonces $x=0$

forma 2. (lo expliqué mal en el Aux, es mejor la forma de arriba)

Por Contradicción Supongamos que $x\neq 0$,

$$x\cdot x = 0 \quad /\cdot\, x^{-1}$$

$$x^{-1}\cdot x\cdot x = x^{-1}\cdot 0$$

$$(x^{-1}\cdot x)\cdot x = 0 \quad \text{/ Ax. Asociatividad, Absorción del 0}$$

$$1\cdot x = 0$$

$$x = 0$$

$\times$, pues Supusimos que $x\neq 0$, esto implica que $x=0$

Si no ven la Contradicción, notar que Si $x=0$ $/\cdot\, x^{-1}$

$\Rightarrow x\cdot x^{-1} = 0 \Rightarrow 1=0$ $\times$, por lo tanto la suposición inicial debe ser falsa es decir, $x=0$ (y no $x\neq 0$) fin

||P2|| Supongamos que $\exists b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ tq $b+b=0$. Probemos que: $\forall x \in \mathbb{R}, x+x=0$

1ero, utilizemos el elemento $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ para extraer alguna propiedad.

Notar que $b+b = b \cdot 1 + b \cdot 1$ / Ax. neutro multi

utilizamos el truco de multiplicar por 1 $= b \cdot (1+1)$ / Ax. distributi.

Ahora, sabemos por Hipotesis que $b+b=0$ Entonces,

$$0 = b \cdot (1+1)$$

Por propiedad de $\mathbb{R}$ (lo cumple un cuerpo)

$$(*)\ \forall x,y \in \mathbb{R} \text{ Si } x \cdot y = 0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$$

En este caso particular dado que $b \neq 0 \Rightarrow (1+1)=0$. ocupamos esto.

2do, Notemos que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+x = x \cdot 1 + x \cdot 1$ / Ax. neutro multi

$= x \cdot (1+1)$ / Ax. distribu

$= x \cdot 0$ / Propiedad nueva

$= 0$ / Propiedad Absorción del cero

demostramos lo pedido, si fuera falta probemos $(*)$

Dem: tenemos por Hipotesis que $x \cdot y = 0$. Si $x=0$ Concluimos la dem.

Si suponemos $x \neq 0$. luego $x \cdot y = 0$ / $x^{-1}\cdot$

$(x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot 0$ / P. Abs. Cero

$1 \cdot y = 0$ / Ax. inv. multi

$y = 0$ / Ax. neutro multi.

$\therefore$ demostramos que $x=0 \vee y=0$

||P3|| Me olvidé probar: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = -(-x)$. (Es decir, probemos que $x + (-x) = 0$)

Dem: Notar que $x + (-x) = 0$ por Ax. de inverso Aditivo.

Luego, por Conmutatividad $(-x) + x = 0$ y por unicidad de inversos

$$\Rightarrow \quad x = -(-x)$$

Probemos que: $(-a)(-b) = ab$

esto se debe probar · esto es solo notación

Para ello probemos antes que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = -xy$ (Propiedad 4 Apunte)

1ero: PDQ: $x(-y) = -(x \cdot y)$, es decir, dado el procedimiento standar

Vamos a probar que el inverso Aditivo de (xy) es $a \cdot (-y)$, o sea que:

$$(x \cdot y) + (x \cdot (-y)) = 0$$

Dem:

$$\begin{aligned}
(x \cdot y) + (x \cdot (-y)) &= x \cdot y + x \cdot (-y) && / \text{ Simplemente es un paréntesis} \\
&= x\,(y + (-y)) && / \text{ Ax. distribu} \\
&= x \cdot 0 && / \text{ Ax. inv. aditivo} \\
&= 0 && / \text{ Propiedad Abs. del Cero}
\end{aligned}$$

$\therefore$ Por Conmutatividad $x(-y) + (xy) = 0$ y unicidad de inversos

$$\Rightarrow -(xy) = x(-y)$$

2do: Probemos que $(-a)(-b) = ab$, es decir, $(-a)(-b) + (-(ab)) = 0$

dado que demostramos lo Anterior, vamos a tratar de utilizarlo.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \cdot (-y) = -(xy) \qquad (*)$$

Entonces,

dem Sea $x = (-a)$, $y = b$ utilizando la propiedad

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (-a) \cdot (-y) &= -((-a) \cdot b) && / \text{ Propiedad } (*) \\
&= -(b \cdot (-a)) && / \text{ Ax. Conmutatividad} \\
&= -(-(ba)) && / \text{ Nuevamente utilizamos la propiedad} \\
& && \text{con } x = b, y = a \Rightarrow b(-a) = -(ba) \\
&= ba && / \text{ Propiedad Signos} \\
&= ab && / \text{ Ax. Conmutatividad}
\end{aligned}$$

||P4||

Probemos que $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (-(a^{-1})+1)\cdot a = a + (-1)$

Dado que la expresión es más extensa no seguiremos el camino standar de demostrar

$((-(a^{-1})+1)\cdot a) + (-(a+(-1))) = 0$ (Es decir, que son inversos aditivos)

Desarrollando el lado izquierdo, sea $a \neq 0$

$$
\begin{aligned}
(-(a^{-1})+1)\cdot a &= (-(a^{-1}))\cdot a + 1\cdot a && \text{/ Ax. distribu.}\\
&= (-(a^{-1}))\cdot a + a && \text{/ Ax. neutro multipli}\\
&= -(a^{-1}\cdot a) + a \\
&= -(a\cdot a^{-1}) + a && \text{/ Ax. Conmutati.}\\
&= -(1) + a && \text{/ Ax. inverso multi}\\
&= a + (-1) && \text{/ Ax. Conmutati.}
\end{aligned}
$$

Nos faltaría solo probar la propiedad auxiliar que utilizamos en rojo

Debemos probar $(-x)\cdot y = -(xy) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Es decir, $(-x)\cdot y + xy = 0$

Dem:
$$
\begin{aligned}
(-x)y + xy &= ((-x)+x)\cdot y && \text{/ Ax. distribu.}\\
&= 0\cdot y && \text{/ Ax. inverso Aditivo}\\
&= y\cdot 0 && \text{/ Ax. Conmutati.}\\
&= 0 && \text{/ Propiedad Abs. del Cero}
\end{aligned}
$$

Luego, por Conmutatividad $xy + (-x)y = 0$, como por teorema el inverso Aditivo es único $\Rightarrow (-x)y = -(xy) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Esto ya lo Hice en la P3 pero con $x\cdot(-y) = -(xy)$ que en verdad es lo mismo