MA1001-8 Introducción al Calculo
Profesora: Natalia Ruiz
Auxiliares: Allen Arroyo & Jesús Sayes

Auxiliar 1: Axiomas de Cuerpo

P1. Usando **solo** los axiomas de cuerpo de los números reales y la unicidad de neutros e inversos, demuestre:

a. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ -((-x)+y) = x + (-y)$
b. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ -(x^{-1}) = (-x)^{-1}$
c. [Propuesto] $\forall x, y \in \mathbb{R},\ -(xy^{-1}) = (-x)y^{-1}$
d. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x + y = 0 \wedge x + z = 0 \Rightarrow y = z$
e. Si $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

P2. Supongamos que existe un elemento $b \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$ tal que $b + b = 0$. Demuestre que se puede concluir

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x + x = 0$$

P3. Demuestre usando solamente axiomas, teoremas de existencia y unicidad de neutros e inversos lo siguiente:

$$(-a)(-b) = ab$$

Puede seguir el siguiente procedimiento para guiarse,

1. Primero Demuestre $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x = -(-x)$ (Regla de los inversos)
2. Luego demuestre $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$(Regla de los signos)
3. Utilice (2) en un comienzo, para re-escribir $(-a)(-b)$ en una forma conveniente.
4. Al final utilice (1) para llegar a (ab).

P4. Usando los axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos, y la propiedad $a \cdot 0 = 0$, demuestre que:

$$\forall a \neq 0, \quad (-(a^{-1}) + 1) \cdot a = a + (-1)$$

Axiomas de cuerpo de los reales

Axioma 1 (Conmutatividad). $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1. $x + y = y + x$
2. $x \cdot y = y \cdot x$

Axioma 2 (Asociatividad). $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Axioma 3 (Distributividad). $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Axioma 4 (Existencia elemento neutro para suma).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists e_1 \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + e_1 = x$$

Axioma 5 (Existencia elemento neutro para multiplicación).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists e_2 \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \cdot e_2 = x$$

Teorema 1. *En $\mathbb{R}$, el elemento neutro para la suma es único, igualmente para el neutro multiplicativo.*

Observacion 1. *Al único neutro para el producto lo llamaremos "uno", denotado por 1. Mientras que al único neutro para la suma lo llamaremos "cero" denotado por 0.*

Axioma 6 (Existencia elemento inverso para suma). $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists s(x) \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x + s(x) = 0$$

Axioma 7 (Existencia elemento inverso para multiplicación). $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\exists m(x) \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x \cdot m(x) = 1$$

Teorema 2. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ el inverso aditivo es único. En cambio, para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ el inverso multiplicativo es único.*

Observacion 2. *Los inversos aditivos se denotan por $-x$, mientras que los multiplicativos x^{-1}*

Con los axiomas anteriores y las operaciones $(+, \cdot)$, se denota que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un **Cuerpo**.

Propiedades de $\mathbb{R}$ relacionadas con igualdad

Proposicion 1. ***(Absorción del Cero)****(No es Axioma)*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ x \cdot 0 = 0$$

Observacion 3. *Una consecuencia de la propiedad es que no existe inverso multiplicativo de 0.*

A veces piden demostrar la propiedad, apréndanla. Se recomienda ***no*** *guiarse del apunte.*

Proposicion 2. *En $\mathbb{R}$ las ecuaciones*

1. $a + x = b$
2. $a \cdot x = b$ *, con* $a \neq 0$

poseen solución única.

Observacion 4. *Procesos algebraicos validos:*

1. *Cancelación para la suma :*
$$x + b = x + c, \text{ entonces } b = c$$
2. *Cancelación para el producto, si $x \neq 0$:*
$$x \cdot b = x \cdot c, \text{ entonces } b = c$$
3. *Solución de ec. lineal general $a \cdot x + b = 0$, con $a \neq 0$ es :*
$$x = -\frac{b}{a}$$

Proposicion 3. *(Regla de los inversos)*

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ -(-x) = x$*, es decir, el inverso aditivo del inverso aditivo de un numero es el mismo numero.*
2. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$*, es decir, el inverso multiplicativo del inverso multiplicativo de un numero es el mismo numero.*

Proposicion 4. *(Regla de signos)*

1. $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$
2. $(-a) \cdot (-b) = ab$
3. $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$
4. *Si* $a, b \neq 0$*, entonces* $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
5. $a - (b + c) = a - b - c$
6. $a - (b - c) = a - b + c$

Proposicion 5. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } \ x \cdot y = 0, \text{ entonces } x = 0 \ \vee y = 0$$