MA1001-8 Introducción al Cálculo
Profesora: Natalia Ruiz
Auxiliares: Allen Arroyo & Jesús Sayes

1. Resumen para RP 1: Axiomas de Cuerpo de $\mathbb{R}$

Axiomas de cuerpo de los reales

Axioma 1 (**Conmutatividad**). $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1. $x + y = y + x$
2. $x \cdot y = y \cdot x$

Axioma 2 (**Asociatividad**). $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Axioma 3 (**Distributividad**). $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Axioma 4 (**Existencia elemento neutro para suma**).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists e_1 \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + e_1 = x$$

Axioma 5 (**Existencia elemento neutro para multiplicación**).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists e_2 \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \cdot e_2 = x$$

Teorema 1. *En $\mathbb{R}$, el elemento neutro para la suma es único, igualmente para el neutro multiplicativo.*

Observacion 1. *Al único neutro para el producto lo llamaremos "uno", denotado por 1. Mientras que al único neutro para la suma lo llamaremos "cero" denotado por 0.*

Axioma 6 (**Existencia elemento inverso para suma**). $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists s(x) \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x + s(x) = 0$$

Axioma 7 (**Existencia elemento inverso para multiplicación**). $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\exists m(x) \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x \cdot m(x) = 1$$

Teorema 2. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ el inverso aditivo es único. En cambio, para todo $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ el inverso multiplicativo es único.*

Observacion 2. *Los inversos aditivos se denotan por $-x$, mientras que los multiplicativos x^{-1}*

Con los axiomas anteriores y las operaciones $(+, \cdot)$, se denota que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un **Cuerpo**.

Propiedades de $\mathbb{R}$ relacionadas con igualdad

Proposicion 1. *(Absorción del Cero)(**No es Axioma**)*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot 0 = 0$$

Observacion 3. *Una consecuencia de la propiedad es que no existe inverso multiplicativo de 0.*

*A veces piden demostrar la propiedad, apréndanla. Se recomienda **no** guiarse del apunte.*

Proposicion 2. *En $\mathbb{R}$ las ecuaciones*

1. $a + x = b$
2. $a \cdot x = b$, *con* $a \neq 0$

poseen solución única.

Proposicion 3. *(Regla de los inversos)*

1. $\forall x \in \mathbb{R} - (-x) = x$, *es decir, el inverso aditivo del inverso aditivo de un numero es el mismo numero.*
2. $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$, *es decir, el inverso multiplicativo del inverso multiplicativo de un numero es el mismo numero.*

Proposicion 4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } \ x \cdot y = 0, \text{ entonces } x = 0 \ \vee y = 0$$

Proposicion 5. *(Regla de signos)*

1. $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$
2. $(-a) \cdot (-b) = ab$
3. $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$
4. *Si* $a, b \neq 0$, *entonces* $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
5. $a - (b + c) = a - b - c$
6. $a - (b - c) = a - b + c$

Observacion 4. *Procesos algebraicos válidos:*

1. *Cancelación para la suma :*

$$x + b = x + c, \text{ entonces } b = c$$

2. *Cancelación para el producto, si* $x \neq 0$ *:*

$$x \cdot b = x \cdot c, \text{ entonces } b = c$$

3. *Solución de ec. lineal general* $a \cdot x + b = 0$, *con* $a \neq 0$ *es :*

$$x = -\frac{b}{a}$$

Proposicion 6. *(Propiedades extra)*

1. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ con } b, c \neq 0$
2. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ con } b, d \neq 0$
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ con } b, d \neq 0$
4. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ con } b, c, d \neq 0$
5. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
6. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
7. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
8. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
9. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$