

MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.**Profesor:** Jessica Trespalacios J.**Auxiliar:** Sebastián P. Pincheira**4 de julio de 2025**

PAUTA AUXILIAR 14

 $\frac{d}{dx}$ derivadas**Problema 1.** Calcule $\frac{d}{dx}f$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \sin(x + x^2)$

d) $f(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$

b) $f(x) = \sin(\cos(x))$

e) $f(x) = \sin((x+1)^2(x+2))$

c) $f(x) = \frac{\sin(\cos(x))}{x}$

f) $f(x) = \sin^2 x \sin x^2 \sin^2 x^2$

Solución. a) $\frac{d}{dx} \sin(x + x^2) = \sin'(x + x^2) \frac{d}{dx}(x + x^2) = \cos(x + x^2)(1 + 2x).$

b) $\frac{d}{dx} \sin(\cos(x)) = \sin'(\cos(x)) \cos'(x) = \cos(\cos(x))(-\sin(x)) = -\sin(x) \cos(\cos(x)).$

c) $\frac{d}{dx} \frac{\sin(\cos(x))}{x} = \frac{(\frac{d}{dx} \sin(\cos(x)))x - \sin(\cos(x)) \frac{d}{dx} x}{x^2} = \frac{-\sin(x) \cos(\cos(x))x - \sin(\cos(x))}{x^2}.$

d) $\frac{d}{dx} \sin(\cos(\sin(x))) = \frac{d}{dx} (\sin \circ \cos)(\sin(x)) = (\sin \circ \cos)'(\sin(x)) \sin'(x) = -\sin(\sin(x)) \cos(\cos(\sin(x))) \cos(x).$ Otra solución:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \sin(\cos(\sin(x))) &= \sin'(\cos(\sin(x))) \frac{d}{dx} \cos(\sin(x)) \\
 &= \cos(\cos(\sin(x))) \cos'(\sin(x)) \sin'(x) \\
 &= \cos(\cos(\sin(x))) (-\sin(\sin(x))) \cos(x) \\
 &= -\sin(\sin(x)) \cos(\cos(\sin(x))) \cos(x).
 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \sin((x+1)^2(x+2)) &= \sin'((x+1)^2(x+2)) \frac{d}{dx}((x+1)^2(x+2)) \\
 &= \cos((x+1)^2(x+2)) \left[(x+2) \frac{d}{dx}((x+1)^2) + (x+1)^2 \frac{d}{dx}(x+2) \right] \\
 &= \cos((x+1)^2(x+2)) [(x+2)2(x+1) + (x+1)^2]
 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \sin^2 x \sin x^2 \sin^2 x^2 &= \left(\frac{d}{dx} \sin^2 x \right) \sin x^2 \sin^2 x^2 + \sin^2 x \frac{d}{dx} \sin x^2 \sin^2 x^2 \\
 &= 2 \sin(x) \sin'(x) \sin x^2 \sin^2 x^2 + \sin^2 x \left[\left(\frac{d}{dx} \sin x^2 \right) \sin^2 x^2 + \sin x^2 \frac{d}{dx} \sin^2 x^2 \right] \\
 &= 2 \sin(x) \cos(x) \sin x^2 \sin^2 x^2 + \sin^2 x [\sin'(x^2) 2x \sin^2 x^2 + \sin x^2 2 \sin(x^2) \sin'(x^2) 2x] \\
 &= 2 \sin(x) \cos(x) \sin x^2 \sin^2 x^2 + \sin^2 x [2x \cos(x^2) \sin^2 x^2 + 2 \sin x^2 \sin(x^2) \cos(x^2) 2x] \\
 &= 2 \sin(x) \cos(x) \sin(x^2) \sin^2(x^2) + 2x \sin^2(x) \cos(x^2) \sin^2(x^2) + 2 \sin^2(x) \sin^2(x^2) \cos(x^2) 2x
 \end{aligned}$$

□

Problema 2. Calcule $\frac{d}{dx} \arcsin(x)$.

Solución. Sea $f: [-\pi/2, \pi/2]$ definida mediante $x \mapsto \sin x$. con esto, $f^{-1} = \arcsin$. De la formula de la derivada de la inversa se tiene que

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= (f^{-1})'(x) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

con lo que

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Problema 3. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$e^{2 \arcsin(yx)} = \log(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto P donde la curva corta al eje de las abscisas ($y = 0$) con abscisa positiva ($x > 0$).

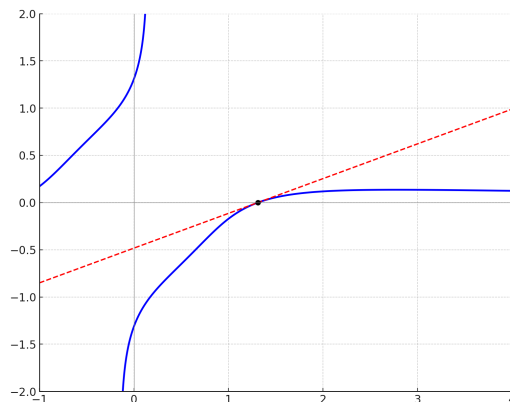


Figura 1: Curva definida por $e^{2 \arcsin(xy)} = \log(1 + x^2 + y^2)$, con la recta tangente que pasa por P .

Solución. Primero, calculamos el punto P . Se tiene que $P_2 = 0$, $P_1 > 0$ y, además, cumple la ecuación. Con esto:

$$\begin{aligned} e^{2 \arcsin(0)} &= \log(1 + P_1^2 + 0^2) \\ \Leftrightarrow e^0 &= \log(1 + P_1^2) \\ \Leftrightarrow 1 &= \log(1 + P_1^2) \\ \Leftrightarrow e &= 1 + P_1^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{e-1} &= P_1 \end{aligned}$$

donde, en el último paso, se usó que $P_1 > 0$. Con esto, $P = (\sqrt{e-1}, 0)$.

Usaremos función implícita para encontrar la tangente. La derivada del lado izquierdo de la ecuación es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} e^{2 \arcsin(yx)} &= e^{2 \arcsin(yx)} \frac{d}{dx} 2 \arcsin(yx) \\ &= e^{2 \arcsin(yx)} \frac{2}{\sqrt{1-x^2y^2}} \frac{d}{dx} xy \\ &= e^{2 \arcsin(yx)} \frac{2}{\sqrt{1-x^2y^2}} \left(y + x \frac{dy}{dx}\right) \\ &= e^{2 \arcsin(yx)} \frac{2(y + x \frac{dy}{dx})}{\sqrt{1-x^2y^2}}\end{aligned}$$

mientras que la derivada del lado derecho de la ecuación es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \log(1+x^2+y^2) &= \frac{1}{1+x^2+y^2} \frac{d}{dx} (1+x^2+y^2) \\ &= \frac{1}{1+x^2+y^2} (2x + 2y \frac{dy}{dx}) \\ &= \frac{2(x + y \frac{dy}{dx})}{1+x^2+y^2}\end{aligned}$$

juntando ambos resultados, obtenemos que

$$e^{2 \arcsin(yx)} \frac{2(y + x \frac{dy}{dx})}{\sqrt{1-x^2y^2}} = \frac{2(x + y \frac{dy}{dx})}{1+x^2+y^2}$$

Como nos interesa la pendiente en P , reemplazamos x e y por los valores de P

$$\begin{aligned}e^{2 \arcsin(0)} \frac{2(\sqrt{e-1} \frac{dy}{dx})}{\sqrt{1}} &= \frac{2(\sqrt{e-1})}{1+e-1} \\ \iff \sqrt{e-1} \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{e-1}}{e} \\ \iff \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

con lo que la pendiente de la recta tangente a la curva en P es $\frac{1}{e}$.

Para encontrar la recta tangente, es necesario entonces encontrar la recta que pasa por P y que tiene pendiente $\frac{1}{e}$. Esta recta es

$$\frac{1}{e}(x - \sqrt{e-1})$$

□

Problema 4. a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^n(x)}{x}$$

sin usar límites conocidos que no sean $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$. **Hint:** Inducción.

b) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}.$$

Solución. a) Mostraremos por inducción que el límite es 0. Para $n = 1$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \log^n(x)}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Si asumimos que el límite es 0 para $n - 1$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \log^n(x)}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n \log^{n-1}(x)/x}{1} = n \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^{n-1}(x)}{x} = 0.$$

Con lo que, por inducción, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^n(x)}{x} = 0$.

b) Como el numerador y denominador se van a cero, entonces podemos aplicar la regla de L'Hôpital con lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos(x)}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

donde usamos la regla de L'Hôpital también en la segunda igualdad pues nuevamente el numerador y denominador se iban a cero. □

Problema 5. a) Sean $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ funciones diferenciables de (a, b) a $\mathbb{R}$. Notemos que, para cada $x \in (a, b)$ “fijo”, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$. ¿Es verdad que

$$\forall x \in (a, b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)?$$

Hint: $f_n(x) = x/(1 + n^2 x^2)$.

b) Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $x \mapsto b \sin(x) + a \cos(x)$. Muestre que f satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= a, \\ f'(0) &= b. \end{aligned} \right\}$$

Notemos que con esto, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f(x)$ y basta con saber el valor de f para saber el valor de f'' .

Solución. a) Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_n: (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{1 + n^2 x^2}. \end{aligned}$$

Sea $x \in (-1, 1)$ y calculemos primero $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} = \frac{x/n^2}{1/n^2 + x^2} \rightarrow \frac{0}{x^2} = 0.$$

Con esto, $\forall (-1, 1)$, $\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{d}{dx} 0 = 0$. Calculemos ahora, primero, $\frac{d}{dx} f_n(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_n(x) &= \frac{d}{dx} \frac{x}{1 + n^2 x^2} \\ &= \frac{(\frac{d}{dx} x)(1 + n^2 x^2) - x(\frac{d}{dx} 1 + n^2 x^2)}{(1 + n^2 x^2)^2} \\ &= \frac{(1 + n^2 x^2) - x(n^2 2x)}{(1 + n^2 x^2)^2} \\ &= \frac{1 + n^2 x^2 - 2n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} \\ &= \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} \end{aligned}$$

con lo que, si $x \in (-1, 1)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2 x^2}{1 + 2n^2 x^2 + n^4 x^4} = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < |x| < 1. \end{cases}$$

con lo que $\exists x \in (-1, 1)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f(x) \neq \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

- b) Se tiene que $f(0) = b \sin(0) + a \cos(0) = a$. Además, $f'(x) = b \cos(x) - a \sin(x)$ con lo que $f'(0) = b \cos(0) - a \sin(0) = b$. Se tiene, además, $f''(x) = -b \sin(x) - a \cos(x)$. Con esto, $f''(x) + f(x) = -b \sin(x) - a \cos(x) + b \sin(x) + a \cos(x) = 0$ y se concluye. □

Problema 6. *El área entre dos círculos concéntricos que están variando es, en todo minuto, $9\pi \text{ cm}^2$. La tasa en la que varía el círculo más grande es $10\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. ¿Que tan rápido está cambiando el perímetro del círculo más pequeño cuando su área es $16\pi \text{ cm}^2$?*

Solución. Sea $r_1(t)$ el radio de el círculo pequeño en el tiempo t y $r_2(t)$ el área del círculo grande en el tiempo t (ambos en cm). Con esto, $0 < r_1(t) < r_2(t)$. Sea, para $i \in \{1, 2\}$, $A_i(t) = \pi r_i(t)^2$ y $P_1(t) = 2\pi r_1(t)$. Queremos $D_t P_1(t) |_{t=\tau}$ donde τ es tal que $A_1(\tau) = 16\pi$. Es decir, queremos calcular $2\pi r_1'(\tau)$ tal que $\pi r_1(\tau)^2 = 16\pi$. Es decir, queremos calcular $2\pi r_1'(\tau)$ tal que $r_1(\tau) = 4$. Intentaremos encontrar r_1' con respecto a r_1 :

La geometría del problema nos impone

$$\begin{aligned} A_2(t) - A_1(t) &= 9\pi, \\ A_2'(t) &= 10\pi. \end{aligned}$$

De la primera ecuación ($\pi r_2(t)^2 - \pi r_1(t)^2 = 9\pi$), derivando, se sigue que $2r_2(t)r_2'(t) - 2r_1(t)r_1'(t) = 0$ con lo que $2r_2(t)r_2'(t) = 2r_1(t)r_1'(t)$. De la segunda ecuación, se sigue que $2\pi r_2(t)r_2'(t) = 10\pi$ con lo que, con el resultado de la primera ecuación, se tiene que $2\pi r_1(t)r_1'(t) = 10\pi$ con lo que concluimos que

$$r_1'(t) = \frac{5}{r_1(t)}.$$

Con esto, el problema es: Queremos calcular $2\pi \frac{5}{r_1(\tau)}$ tal que $r_1(\tau) = 4$, es decir, lo que queremos calcular es $2\pi \frac{5}{4}$ y se termina el problema: $5\pi/2$. □

Problema 7. a) *Sea f cualquier función definida en (a, b) . Si x es un punto máximo (o mínimo) para f en (a, b) y f diferenciable en x , muestre que $f'(x) = 0$.*

Solución. 1. Partiremos con $f(x)$ es máximo: Si h es cualquier número tal que $x + h$ está en (a, b) , entonces

$$f(x) \geq f(x + h),$$

pues f alcanza su máximo en (a, b) en x . Esto significa que

$$f(x + h) - f(x) \leq 0.$$

Entonces, si $h > 0$ tenemos

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

y como consecuencia

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

Por otro lado, si $h < 0$, tenemos

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Por hipótesis, f es diferenciable en x , entonces estos dos límites tienen que ser iguales, de hecho, son iguales a $f'(x)$. Esto significa que

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{y} \quad f'(x) \geq 0,$$

de donde se sigue que $f'(x) = 0$.

Si $f(x)$ es mínimo, entonces definimos $g = -f$ con lo que $g(x)$ es máximo y, por lo recién demostrado, $g'(x) = 0$ con lo que $-f'(x) = 0$ y se concluye lo que se quería. $\square$

Problema 8. [3 puntos] Sean $f, g, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \leq k(x).$$

Si además se sabe que f y k son derivables en 0, que $f'(0) = k'(0) = D$ y $f(0) = k(0)$, entonces g es derivable en 0 y $g'(0) = D$.

Solución. Se tiene que $f(0) \leq g(0) \leq k(0)$ con lo que $g(0) = f(0) = k(0)$. Sea $h > 0$, entonces,

$$\begin{aligned} f(h) \leq g(0) \leq k(0) &\implies f(h) - f(0) \leq g(h) - g(0) \leq k(h) - k(0) \\ &\implies \frac{f(h) - f(0)}{h} \leq \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq \frac{k(h) - k(0)}{h} \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h} \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \\ &\implies f'(0) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq k'(0) \\ &\implies D \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq D \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = D. \end{aligned}$$

Sea ahora $h < 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} f(h) \leq g(0) \leq k(0) &\implies f(h) - f(0) \leq g(h) - g(0) \leq k(h) - k(0) \\ &\implies \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq \frac{g(h) - g(0)}{h} \geq \frac{k(h) - k(0)}{h} \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h} \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \\ &\implies f'(0) \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} \geq k'(0) \\ &\implies D \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} \geq D \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} = D. \end{aligned}$$

con lo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = D.$$

$\square$

Problema 9. [3 puntos] Calcule las siguientes derivadas:

a) $f(x) = \sin(x)^x$

b) $f(x) = \log\left(\frac{(1-x)^{7/2}}{(1+x^2)^{11/3}}\right)$.

Solución. a)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin(x)^x &= \frac{d}{dx} e^{x \log(\sin(x))} \\ &= D_{x \log(\sin(x))} e^{x \log(\sin(x))} \frac{d}{dx} x \log(\sin(x)) \\ &= e^{x \log(\sin(x))} \left[\log(\sin(x)) + x \frac{d}{dx} \log(\sin(x)) \right] \\ &= e^{x \log(\sin(x))} [\log(\sin(x)) + x \log'(\sin(x)) \sin'(x)] \\ &= e^{x \log(\sin(x))} [\log(\sin(x)) + x \cos(x) / \sin(x)] \\ &= e^{x \log(\sin(x))} [\log(\sin(x)) + x \cot(x)] \\ &= \sin(x)^x [\log(\sin(x)) + x \cot(x)]\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \log\left(\frac{(1-x)^{7/2}}{(1+x^2)^{11/3}}\right) &= \frac{d}{dx} [\log((1-x)^{7/2}) - \log((1+x^2)^{11/3})] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{7}{2} \log(1-x) - \frac{11}{3} \log(1+x^2) \right] \\ &= \frac{7}{2} \frac{d}{dx} \log(1-x) - \frac{11}{3} \frac{d}{dx} \log(1+x^2) \\ &= \frac{7}{2} \log'(1-x)(-1) - \frac{11}{3} \log'(1+x^2)(2x) \\ &= \frac{7}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{11}{3} \frac{2x}{1+x^2} \\ &= \frac{7}{2(x-1)} - \frac{22x}{3(1+x^2)}\end{aligned}$$

□