

MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.

Profesor: Jessica Trespalcacios J.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

4 de julio de 2025



AUXILIAR 14

 $\frac{d}{dx}$ derivadas**Problema 1.** Calcule $\frac{d}{dx}f$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \sin(x + x^2)$

d) $f(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$

b) $f(x) = \sin(\cos(x))$

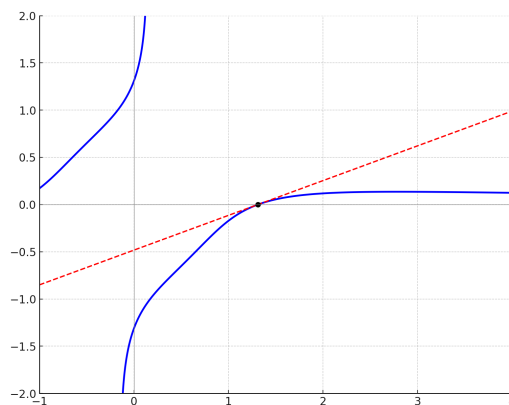
e) $f(x) = \sin((x+1)^2(x+2))$

c) $f(x) = \frac{\sin(\cos(x))}{x}$

f) $f(x) = \sin^2 x \sin x^2 \sin^2 x^2$

Problema 2. Calcule $\frac{d}{dx} \arcsin(x)$.**Problema 3.** Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$e^{2 \arcsin(xy)} = \log(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto P donde la curva corta al eje de las abscisas ($y = 0$) con abscisa positiva ($x > 0$).Figura 1: Curva definida por $e^{2 \arcsin(xy)} = \log(1 + x^2 + y^2)$, con la recta tangente que pasa por P .**Problema 4.** a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^n(x)}{x}$$

sin usar límites conocidos que no sean $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$. **Hint:** Inducción.

b) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}.$$

Problema 5. a) Sean $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ funciones diferenciables de (a, b) a $\mathbb{R}$. Notemos que, para cada $x \in (a, b)$ “fijo”, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$. ¿Es verdad que

$$\forall x \in (a, b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)?$$

Hint: $f_n(x) = x/(1 + n^2 x^2)$.

b) Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $x \mapsto b \sin(x) + a \cos(x)$. Muestre que f satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= a, \\ f'(0) &= b. \end{aligned} \right\}$$

Notemos que con esto, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f(x)$ y basta con saber el valor de f para saber el valor de f'' .

Problema 6. El área entre dos círculos concéntricos que están variando es, en todo minuto, $9\pi \text{ cm}^2$. La tasa en la que varía el círculo más grande es $10\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. ¿Que tan rápido está cambiando el perímetro del círculo más pequeño cuando su área es $16\pi \text{ cm}^2$?

Problema 7. a) Sea f cualquier función definida en (a, b) . Si x es un punto máximo (o mínimo) para f en (a, b) y f diferenciable en x , muestre que $f'(x) = 0$.

Problema 8. [3 puntos] Sean $f, g, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \leq k(x).$$

Si además se sabe que f y k son derivables en 0, que $f'(0) = k'(0) = D$ y $f(0) = k(0)$, entonces g es derivable en 0 y $g'(0) = D$.

Problema 9. [3 puntos] Calcule las siguientes derivadas:

a) $f(x) = \sin(x)^x$

b) $f(x) = \log \left(\frac{(1-x)^{7/2}}{(1+x^2)^{11/3}} \right).$