MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.
Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
27 de junio de 2025

Pauta Auxiliar 13

Limites en $\overline{\mathbb{R}}$

Problema 1. *1. Usando la definición $\varepsilon - \delta$, demuestre que $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$.*

2. Calcule $\lim_{x\to 0}(e^{a/|x|} + e^{b/|x|})^{|x|}$ para a y b reales.

Solución. 1. Sea $\varepsilon > 0$. Se tiene que, para $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| &= \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} - 3\right| \\ &= \left|x^2+x+1-3\right| \\ &= \left|x^2+x-2\right| \\ &= \left|x^2-1+x-1\right| \\ &= |(x+1)(x-1)+x-1| \\ &= |((x+1)+1)(x-1)| \\ &= |(x+2)(x-1)|\end{aligned}$$

con lo que necesitamos encontrar un $\delta > 0$ tal que $|x-1| < \delta$ implica que $|(x+2)(x-1)| < \varepsilon$. Notemos que, si $\delta > 0$, entonces $1-\delta < x < 1+\delta$ y se sigue que $3-\delta < x+2 < 3+\delta$ con lo que, si $\delta \leq 3$, entonces $|x+2| < 3+\delta \leq 6$. Con esto, si $\delta \leq 3$, entonces $|(x+2)(x-1)| < 6|x-1|$. Con esto, queremos un $\delta \leq 3$ que cumpla $|x-1| < \delta \implies 6|x-1| < \varepsilon$. Si $\delta = \text{mín}\{\varepsilon/6, 3\}$, entonces $|x-1| < \delta \implies |x-1| < \varepsilon/6$ y se concluye.

2. Se tiene que, para $x \neq 0$,

$$e^{\text{máx}\{a,b\}/|x|} < e^{a/|x|} + e^{b/|x|} \leq e^{\text{máx}\{a,b\}/|x|} + e^{\text{máx}\{a,b\}/|x|} = 2e^{\text{máx}\{a,b\}/|x|}$$

y, elevando por $|x|$,

$$e^{\text{máx}\{a,b\}} < (e^{a/|x|} + e^{b/|x|})^{|x|} \leq 2^{|x|}e^{\text{máx}\{a,b\}}$$

tomando límite $|x| \to 0$, por el teorema del sándwich, se tiene que $\lim_{x\to 0}(e^{a/|x|} + e^{b/|x|})^{|x|} = e^{\text{máx}\{a,b\}}$.

□

Problema 2. *Calcule la derivada de las siguientes funciones por definición.*

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = x/(x-1)$.

Solución. 1. Se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x+h \\ &= 2x\end{aligned}$$

y se concluye que $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$.

2. Se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h}{h(x+h-1)} - \frac{x}{h(x-1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x-1)}{h(x+h-1)(x-1)} - \frac{x(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - x + xh - h - x^2 - xh + x}{h(x+h-1)(x-1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h-1)(x-1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} \\
&= \frac{-1}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

con lo que $\frac{d}{dx}\frac{x}{x-1}$.

□

Problema 3. ***(3.0 pts)*** *Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y considere la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida mediante*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{bx}, & x < 0 \\ \dfrac{e^{bx} - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Encuentre una relación entre los reales a y b para que $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista.

Solución. Calcularemos primero $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y luego $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Luego resolveremos la ecuación en (a, b),

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{bx} - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} b\frac{e^{bx} - e^0}{bx - 0} \\
&= b \lim_{x\to 0} \frac{e^{bx} - e^0}{bx - 0} \\
&= b
\end{aligned}$$

Donde se usó la propiedad 11.10(2) de apunte. Además,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{bx} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{a}{b}\frac{\sin(ax)}{ax} \\
&= \frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} \\
&= \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

donde se usó la sección 12.7 del apunte para calcular el último límite.

Con esto, como queremos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

se sigue que, para que el límite exista, se necesita

$$b = \frac{a}{b}$$

Es decir, $a = b^2$. □

Problema 4. *1. Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un una función con dominio no-acotado tal que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Muestre que $\lim_{x\to\infty} |f|(x) = \infty$.

2. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} e^x/x^n = \infty$.

3. Sea $p(x)$ un polinomio, es decir, $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k$ con $a_n \neq 0$. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)}.$$

Hint: Use $e^x/p(x) = (e^x/x^n)(x^n/p(x))$. Puede considerar primero el caso $a_n > 0$ y luego $a_n < 0$.

Solución. 1. Sea $M > 0$. Se tiene que existe un $m > 0$ tal que si $x \in A \cap [m, \infty)$, entonces $|1/f(x)| < 1/M$. Se sigue que $M < |f(x)|$ con lo que $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$.

2. Sea $q(n) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$. Mostremos $q(1)$: Sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0,$$

es decir,

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{e^x}{x}\right| = \infty$$

con lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

pues si $M > 0$ entonces existe un $m > 0$ tal que $x > m \implies |e^x/x| > M$ y se concluye que $x > m \implies e^x/x > M$ (pues $e^x > 0$ y $x > 0$ en este caso) y tenemos $q(1)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, mostraremos $q(n)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{x/n}\right)^n}{(x/n)^n n^n} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^u}{u}\right)^n \\
&= \infty
\end{aligned}$$

pues el término en paréntesis tiende a infinito por $q(1)$.

3. Se tiene que, para $x \neq 0$,

$$\frac{e^x}{p(x)} = \frac{e^x}{x^n} \frac{x^n}{p(x)}.$$

Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1/a_n$ (notemos que siempre $\operatorname{sgn}(b_n) = \operatorname{sgn}(a_n)$). Notemos que $\lim_{x\to\infty} x^n/p(x) = b_n$ y $\lim_{x\to\infty} e^x/x^n = \infty$ con lo que es de esperar que $\lim_{x\to\infty} e^x/p(x) = \operatorname{sgn}(b_n)\infty$. Nos pondremos primero en el caso $b_n > 0$: Sea $M > 0$ y sea $m_1 > 0$ tal que $x > m_1 \implies |x^n/p(x) - b_n| < b_n/2$. Se sigue que, si $x > m_1$, entonces $b_n - b_n/2 < x^n/p(x) < b_n + b_n/2$, es decir, $b_n/2 < x^n/p(x)$ cuando $x > m_1$. Sea m_2 tal que $x > m_2 \implies e^x/p(x) > 2M/b_n$. Si definimos $m = \max\{m_1, m_2\}$, entonces $x > m \implies b_n/2 < x^n/p(x)$ y $e^x/p(x) > 2M/b_n$. Se sigue que, si $x > m$, entonces

$$e^x/p(x) = \frac{e^x}{x^n}\frac{x^n}{p(x)} > \frac{e^x}{x^n}\frac{b_n}{2} > \frac{2M}{b_n}\frac{b_n}{2} = M$$

y se concluye que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \infty.$$

Ahora, si $b_n < 0$, entonces $q(x) = -p(x)$ es un polinomio cuyo n-ésimo coeficiente es positivo y, por lo recién demostrado, $\lim_{x\to\infty} e^x/q(x) = \infty$, es decir, $\lim_{x\to\infty} e^x/-p(x) = \infty$ y se concluye que $\lim_{x\to\infty} e^x/p(x) = -\infty$.

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases}.$$

□

Problema 5. ***[3 puntos]*** *Considere la función*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 e^{1/x}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Determine $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to -\infty} f(x)$. *Indique cuales son las asíntotas verticales y horizontales (si las tiene).*

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 e^{1/x}}{1+x^2} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x}}{1/x^2+1} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} \frac{1}{1/x^2+1} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1/x^2+1} \\ &= 1\cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 e^{1/x}}{1+x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{(1/x)^2+1} \\ &= \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{u^2+1} \\ &= \infty \end{aligned}$$

donde se usó el problema 3 para calcular el último límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 e^{1/x}}{1+x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{(1/x)^2+1} \\
&= \lim_{u\to -\infty} \frac{e^u}{u^2+1} \\
&= \lim_{w\to \infty} \frac{e^{-w}}{w^2+1} \\
&= \lim_{w\to \infty} \frac{1}{(w^2+1)e^w} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

pues $(w^2+1)e^w \to \infty$ (además, se aplicó el teorema 13.4).

La recta $x=0$ es una asíntota vertical de f y $y=1$ es asíntota horizontal de f. $\square$

Problema 6. *1. Sea* $f(x) = x(1+e^{-1/x})$ *calcule* $\lim_{x\to 0^+}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *y* $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2. $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{a}-1)$ *con* $a>0$.

Solución. 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x(1+e^{-1/x}) \\
&= \lim_{x\to 0^-} x + xe^{-1/x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{-1/x} - \frac{e^{-1/x}}{-1/x} \\
&= \lim_{u\to \infty} -\frac{1}{u} - \frac{e^u}{u} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

donde se usó el problema 2(2).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0} |x|(1+e^{-1/|x|}) \\
&= \lim_{x\to 0} |x| \lim_{x\to 0}(1+e^{-1/|x|}) \\
&= 0\cdot 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, entonces $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{a}-1) &= \lim_{x\to\infty} x(a^{1/x}-1) \\
&= \lim_{x\to\infty} x(e^{1/x\log(a)}-1) \\
&= \log(a) \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x\log(a)}-e^0}{1/x\log(a)-0} \\
&= \log(a) \lim_{u\to 0} \frac{e^u-e^0}{u-0} \\
&= \log(a).
\end{aligned}$$

$\square$