MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.
Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
27 de junio de 2025

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 13

Limites en $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Problema 1.

1. *Usando la definición $\varepsilon - \delta$, demuestre que* $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$.
2. *Calcule* $\lim_{x\to 0}(e^{a/|x|} + e^{b/|x|})^x$.

Problema 2. *Calcule la derivada de las siguientes funciones por definición.*

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = x^2/(x-1)$.
3. $f(x) = \sin^2(x)$

Problema 3. ***(3.0 pts)*** *Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y considere la función $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida mediante*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{bx}, & x < 0 \\ \dfrac{e^{bx}-1}{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Encuentre una relación entre los reales a y b para que $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista.

Problema 4.

1. *Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un una función con dominio no-acotado tal que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

   Muestre que $\lim_{x\to\infty} |f|(x) = \infty$.

2. *Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} e^x/x^n = \infty$.*
3. *Sea $p(x)$ un polinomio, es decir, $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ con $a_n \neq 0$. Calcule*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)}.$$

   Hint: Use $e^x/p(x) = (e^x/x^n)(x^n/p(x))$. Puede considerar primero el caso $a_n > 0$ y luego $a_n < 0$.

Problema 5. ***[3 puntos]*** *Considere la función*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 e^{1/x}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Determine $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$. Indique cuales son las asíntotas verticales y horizontales (si las tiene).

Problema 6.

1. *Sea $f(x) = x(1+e^{-1/x})$ calcule $\lim_{x\to 0^+}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$.*
2. *Calcule $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{a} - 1)$ con $a > 0$.*