MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.
Profesor: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
16 de junio de 2025

Auxiliar 12

Limites en $\mathbb{R}$

Problema 1. [1] *Calcule los siguientes límites:*

1. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ *donde* $x \geq 0$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\sin(x)}$
3. $\lim_{h\to 0} \dfrac{a(x+h)^n - ax^n}{h}$ *donde* $a, x \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
4. *Sea* $p(x)$ *un polinomio, es decir,* $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k$ *para alguna sucesión real* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Calcular* $\dfrac{p(x+h)-p(x)}{h}$ *con* $x \in \mathbb{R}$.
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(x+1)}{x}$.
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos(x))}{x^2}$.
7. $\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$.

Solución.

1.
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1 \cdot 1.$$

3. Este problema es difícil correspondería hintear la expresión para el binomio a la potencia n. Si $n = 1$, $\lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)-ax}{h} =$

[1] 1. del Spivak: Chap 5, 2. aux 13 de MA1001-4 Otoño 2020, 3. y 4. invención mía, 6. y 7. aux 13 de MA1001-4 Otoño 2020 5. inspirado en este mismo aux.

$\lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a$. Si $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^n - ax^n}{h} &= a \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= a \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k\right) - x^n}{h} \\
&= a \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k\right) + x^n - x^n}{h} \\
&= a \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k}{h} \\
&= a \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\
&= a \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \right) \\
&= anx^{n-1} + a \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \lim_{h\to 0} h^{k-1} \\
&= anx^{n-1} + a \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot 0 \\
&= anx^{n-1}
\end{aligned}$$

4. Si $n = 1$, $\lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim \frac{a_0 + a_1(x+h) - a_0 - a_1 x}{h} = a_1$. Si $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (x+h)^k - a_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k x^k}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k (x+h)^k - a_k x^k}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k (x+h)^k - a_k x^k}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{a_1(x+h) - a_1 x}{h} + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k (x+h)^k - a_k x^k}{h} \right) \\
&= a_1 + \sum_{k=2}^{n} \lim_{h\to 0} \frac{a_k (x+h)^k - a_k x^k}{h} \\
&= a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k k x^{k-1}
\end{aligned}$$

5. Usando la substitución $u = x + 1$, que es biyectiva, tenemos $\lim_{x\to 0} \log(x+1)/x = \lim_{u\to 1} \log(u)/(u-1) = 1$, donde el último límite es conocido del apunte.

6.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\sqrt{1-\sin^2(x)}\right)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\frac{\log(1-\sin^2(x))}{-\sin^2(x)}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin^2(x))}{-\sin^2(x)}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\end{aligned}$$

Definiendo $f(x) = \log(1+x)/x$ y $g\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ mediante $x \mapsto g(x) = -\sin^2(x)$ (la cual toma el valor 0 en un único punto de su dominio), podemos usar que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim_{y\to 0} f(x) = 1$ para concluir que $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1$ con lo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

7.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\cos(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}} &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{\sin^2(x)}\log(\cos(x))\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\log(\cos(x))}{\sin^2(x)}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{\sin^2(x)}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2(x)}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2}\left(\frac{1}{\frac{\sin(x)}{x}}\right)^2\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot 1\right)\\ &= e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

□

Problema 2. [2] *Sea*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q}\\ x, & x \in \mathbb{Q}.\end{cases}\end{aligned}$$

Encuentre todos los puntos $a \in \mathbb{R}$ *donde* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Solución. Mostraremos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$: Sea a_n una sucesión nula que, entonces

$$\min\{0, x_n\} \leq f(x_n) \leq \max\{0, x_n\}$$

con lo que, por el teorema del sándwich, $f(x_n) \to 0$. Como esto es verdad para cualquier $x_n \to 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

[2] Inspirado inconscientemente por Spivak, Calculus: Chapter 5, Limits. Problem 20).

Mostremos ahora que si $a \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Sea x_n una sucesión de irracionales tal que $x_n \to a$. Entonces $f(x_n) = 0$ con lo que $f(x_n) \to 0$. Sea, ahora, y_n una sucesión de racionales tal que $y_n \to a$ (existe pues los racionales son densos y por ende existe, para cada n, un racional $y_n \in (a - 1/n, a + 1/n)$, es decir, $|y_n - a| < 1/n$ con lo que $y_n \to a$). Se sigue que $f(y_n) = y_n$ con lo que $f(y_n) \to a \neq 0$. Con lo que hay dos sucesiones x_n, y_n convergiendo a a tal que $f(x_n)$ y $f(y_n)$ convergen a distintos valores. Se sigue que $f(x)$ no converge cuando $x \to a \neq 0$.

Se concluye que $a = 0$ es el único valor de a que cumple $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. □

Problema 3. [3]

1. *Muestre que si* $\lim_{x\to 0} f(x)/x = l$ *con* $b \neq 0$, *entonces* $\lim_{x\to 0} f(bx)/x = bl$.

2. *Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ *con* $a, b \neq 0$.

Solución. 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(bx)}{x} &= b \lim_{x\to 0} \frac{f(bx)}{bx} \\ &= bl.\end{aligned}$$

donde la última desigualdad queda justificada mediante el siguiente argumento: Sea $g(x) = f(x)/x$ y $h(x) = bx$, entonces $f(bx)/bx = g(h(x))$ donde h es inyectiva y se utiliza el problema 1.

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{x}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{1}{\frac{\sin(bx)}{x}} = \frac{a}{b}$$

□

[3] Spivak, Calculus, Chap. 5 Limits, Problem 14.