MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.
Profesor: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
6 de junio de 2025

Auxiliar 11

exp*onencial*

Problema 1. *a) Demuestre que* $u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$ *converge.*

b) Calcule explícitamente:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(n^2\left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) - 1\right)$$

c) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e^{\frac{1}{n}})^i.$$

Solución. a)

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}}\frac{n!e^n}{n^n} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}}{n!(n+1)e^n e}\frac{n!e^n}{n^n} \\
&= \frac{(n+1)^n}{e}\frac{1}{n^n} \\
&= e^{-1}\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^n \\
&= e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&\leq e^{-1}\sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \middle| n\in\mathbb{N}\right\} \\
&= e^{-1}e \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Se sigue para cualquier n, $u_{n+1} \leq u_n$ y $(u)_n$ es una sucesión decreciente. Como, además, todo los valores de la sucesión son positivos, se concluye que (u_n) es acotada inferiormente y decreciente por lo que converge.

b) Se tiene que (notando que $n^{-2} < 1$ para $n \geq 2$), si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
&1 + n^{-2} \leq e^{n^{-2}} \leq \frac{1}{1-n^{-2}} \\
&\implies n^{-2} \leq e^{n^{-2}} - 1 \leq \frac{1}{1-n^{-2}} - 1 \\
&\implies 1 \leq n^2(e^{n^{-2}} - 1) \leq n^2\left(\frac{1}{1-n^{-2}} - 1\right) \\
&\implies 0 \leq n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1 \leq n^2\left(\frac{1}{1-n^{-2}} - 1\right) - 1 \\
&\implies 0 \leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq n\left(n^2\left(\frac{1}{1-n^{-2}} - 1\right) - 1\right) \\
&\implies 0 \leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq n\left(n^2\left(\frac{n^{-2}}{1-n^{-2}}\right) - 1\right) \\
&\implies 0 \leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq n\left(\frac{1}{1-n^{-2}} - 1\right) \\
&\implies 0 \leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq n\left(\frac{n^{-2}}{1-n^{-2}}\right) \\
&\implies 0 \leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq \frac{n^{-1}}{1-n^{-2}} \\
&\implies 0 \leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq \frac{1/n}{1-1/n^2}
\end{aligned}$$

y, por teorema del sándwich, $n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1)$ es nula.

c) Se tiene que, para cualquier real r,

$$\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r(r^n - 1)}{r - 1}$$

pues es la suma geométrica. De esto se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (e^{\frac{1}{n}})^i &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - e^0}{\frac{1}{n} - 0}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^0}{\frac{1}{n} - 0}} \\
&= \frac{(e-1)}{e^0} \\
&= e - 1.
\end{aligned}$$

□

Problema 2. *Calcule los siguientes límites.*

a) **(**1,3 ***pts.)*** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{2e^n - e^{-n}}$.

b) **(**1 ***pts.)*** $\lim_{n\to\infty} (1+e^n)^{1/n}$

c) **(**1 ***pts.)*** $\lim_{n\to\infty} \left\{\exp\left(\dfrac{n^2+2}{2n^2}\right) + n\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

Solución. a)

$$\begin{aligned}\frac{e^n}{2e^n - e^{-n}} &= \frac{1}{2 - e^{-n}/e^n}\\ &= \frac{1}{2-e^{-2n}}\\ &= \frac{1}{2-(1/e^2)^n} \to \frac{1}{2}\end{aligned}$$

donde se usó que $\lim\left(\frac{1}{e^2}^n = 0\right)$ pues $|\frac{1}{e^2}| < 1$.

b) Se tiene que

$$e = (e^n)^{1/n} \leq (1+e^n)^{1/n} \leq (e^n + e^n)^{1/n} = 2^{1/n}e$$

con lo que $e \leq (1+e^n)^{1/n} \leq \sqrt[n]{2}e$ y por el teorema del sándwich, $(1+e^n)^{1/n} \to e$.

c) Se tiene que

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{n^2+2}{2n^2}\right) + n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \exp\left(\frac{1+2/n^2}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &\to \exp(1/2) + \log(e)\\ &= e^{1/2}+1\\ &= \sqrt{e}+1.\end{aligned}$$

□

Problema 3. *El objetivo del siguiente problema es encontrar, para cada $x > 0$ una sucesión que converja a $\log(x)$ (al igual que se hizo con la función exponencial). Sea $x > 0$, muestre que*

$$\log(x) = \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1)$$

Con lo que pudimos haber definido primero log *y luego definir* exp *como su inversa.*

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}n(x^{1/n}-1) &= \frac{x^{1/n} - x^0}{1/n}\\ &= \frac{e^{\frac{1}{n}\log(x)} - e^0}{\frac{1}{n}\log(b) - 0}\log(x)\\ &\to e^0\log(x)\\ &= \log(x).\end{aligned}$$

□

Problema 4. *a) Sea (x_n) una sucesión y sea (y_n) convergente a $y \neq 0$. Muestre que si*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = l,$$

entonces x_n converge a l/y. (Hint. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $(ac > 0 \wedge a < b < c \implies \min(|a|,|c|) < |b|)$.)

b) Sea (a_n) convergente a $L > 0$. Se define

$$s_n = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$$

demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n} = 1.$$

c) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

si es que existe.

Solución. a) Mostremos primero que x_n es acotada: por contradicción, sea x_n no-acotada. Como $y_n \to y \neq 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies |y_n - y| < |y|/2$, es decir, $y - |y|/2 < y_n < y + |y|/2$ y se sigue que, para $n > n_0$,

$$\text{mín}(|y - |y|/2|, |y + |y|/2|) < |y_n|$$

(donde se usó que $ac > 0 \wedge a < b < c \implies \text{mín}(|a|, |c|) < |b|$) y se sigue que, para $n > n_0$,

$$|x_n| \,\text{mín}(|y - |y|/2|, |y + |y|/2|) \leq |x_n y_n|$$

con lo que, si denotamos $c = \text{mín}(|y - |y|/2|, |y + |y|/2|)$ (notemos que $c > 0$) y se tiene que, para $n > n_0$,

$$|x_n| c < |x_n y_n|$$

con lo que $|x_n y_n|$ no puede ser acotada, una contradicción (pues $(x_n y_n)$ es convergente). Es decir, x_n es acotada y denotamos $\alpha = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
|x_n - l/y| &= \frac{|x_n y - l|}{|y|} \\
&= \frac{|x_n y_n - x_n y_n + x_n y - l|}{|y|} \\
&\leq \frac{|x_n y_n - l| + |x_n y - x_n y_n|}{|y|} \\
&\leq \frac{|x_n y_n - l| + |y - y_n||x_n|}{|y|} \\
&\leq \frac{|x_n y_n - l| + |y - y_n|\alpha}{|y|} \\
&= |x_n y_n - l| \frac{1}{|y|} + |y - y_n| \frac{\alpha}{|y|} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

con lo que $x_n \to l/y$ y se concluye.

b) Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{s_n}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n} &= \left(\frac{1+\frac{a_n}{n}}{1+\frac{L}{n}}\right)^n \\
&= \left(\frac{n+a_n}{n+L}\right)^n \\
&= \left(1 + \left[\frac{n+a_n}{n+L} - 1\right]\right)^n \\
&= \left(1 + \left[\frac{a_n - L}{n+L}\right]\right)^n \\
&\to 1
\end{aligned}$$

donde el último paso se argumenta mediante el hecho que $\frac{a_n - L}{n+L} \to 0$ y $n\frac{a_n-L}{n+L} \to 0$ (proposición 10.3 del apunte).

c) Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^L} = e^{-L} \neq 0.$$

y, además, por la parte anterior,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} s_n \frac{1}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^n} = 1$$

con lo que, por la parte a), se sigue que s_n converge y lo hace a $1/e^{-L}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = e^L.$$

$\square$