

MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.

Profesor: Jessica Trespalacios J.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

30 de mayo de 2025



AUXILIAR 10

Sucesiones

Problema 1. Considere la sucesión (s_n) definida recursivamente por

$$\left. \begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{4s_n + 6} \\ s_0 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- I) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n > 0$.
- II) Demuestre que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.
- III) Demuestre que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y calcule su límite.

Problema 2. Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que, para toda sucesión convergente (x_n) con $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$, se tiene que $\lim x_n \in F$. Muestre que para todo $y \notin F$, se tiene que $d(y, F) := \inf\{|y - x| : x \in F\} > 0$.

Hint: Use contradicción y construya una sucesión (x_n) con valores en F tal que $x_n \rightarrow y$ (recuerde las propiedades del ínfimo).

Problema 3. Sea $u_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. Calcule $\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$.

Hint: Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tiene que $|\{i \in \mathbb{N} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\} \wedge i \text{ es par}\}| = \frac{n - (1 + (-1)^{n+1})/2}{2}$.

Problema 4. Sea, para $n \geq 1$,

$$t_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}.$$

Pruebe que (t_n) converge.

Problema 5. Calcule, si es que existen, los siguientes límites:

a) $\lim \sqrt[n]{13n} - \frac{n^{10} \cos(n!)}{(1,1)^n}$

b) $\lim \left(\frac{2n-1}{3n+5} \right)^n$

c) $\lim \left(\frac{n+2}{2n} \right)^{2n}$

d) $\lim \sqrt[n]{\frac{2n+1}{2n+1 + \frac{5^n}{(n-1)!}}}$

e) $\lim \left(\frac{(n^2+2n+2)n}{(n^2+2)(n+2)} \right)^n$

Apéndice.

Problema 1.

n	s_n^2
0	1
1	1,9599999999999997
2	1,998810939357907
3	1,999964987220335
4	1,999989693112423
5	1,999999696593485
6	1,999999991068544
7	1,999999999737081
8	1,99999999999226
9	1,999999999999771
10	1,999999999999996

Cuadro 1: Los valores de s_n^2 para $n \in \{0, 1, \dots, 10\}$ generados por un script de Python (valores aproximados).