MA1006-6 Introducción al Cálculo-2025.
Profesor: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
9 de mayo de 2025

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta Auxiliar 8

El Supremo

Problema 1.

a) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ una cota superior. Muestre que $\sup A = \alpha$ *si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ \alpha - \varepsilon < a.$$

De manera similar, muestre que, si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A, entonces $\inf A = \beta$ *si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ a < \beta + \varepsilon.$$

b) Sea γ un número real positivo. Sea $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r \in \mathbb{Q} \wedge r < \gamma\}$. Muestre que A tiene supremo y calcúlelo.

Solución. a) Asumamos $\sup A = \alpha$. Sea $\varepsilon > 0$ luego, como $\alpha - \varepsilon < \alpha$, entonces $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior de A y por lo tanto existe un elemento $a \in A$ que lo supera. Es decir, $\alpha - \varepsilon < a$.

Asumamos ahora $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ \alpha - \varepsilon < a$. Como α es cota superior de A, se sigue que $\sup A \leq \alpha$: si $\sup A < \alpha$, entonces existe un $a \in A$ tal que $\alpha - (\alpha - \sup A) < a$ (donde se usó $\varepsilon = \alpha - \sup A > 0$), es decir, $\sup A < a$ para algún $a \in A$ lo que contradice la definición de supremo y se concluye que $\sup A = \alpha$.

Para el ínf el proceso es similar y queda como propuesto.

b) Como γ es un número real positivo, se tiene que $0 < \gamma$ con lo que $0 \in A$. Claramente γ es una cota superior de A, mostremos que es la menor: sea $\varepsilon > 0$ y sea $r \in (\gamma - \varepsilon, \gamma) \cap \mathbb{Q}$ (válido pues los reales son densos en $\mathbb{R}$), se sigue que $\gamma - \varepsilon < r$ y, por la parte anterior, se sigue que $\sup A = \gamma$.

□

Problema 2. *Sea*

$$A = \left\{ \frac{m}{m(n+1)+1} \middle| m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Muestre que $\sup A = 1$.

Solución. Partiremos mostrando que 1 es cota superior: Si $m = 0$, entonces

$$\frac{m}{m(n+1)+1} = 0.$$

Si $n = 0$,

$$\frac{m}{m(n+1)+1} = \frac{m}{m+1} < 1.$$

Si $n, m \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{m}{m(n+1)+1} &\leq \frac{m}{m(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &< 1 \end{aligned}$$

y se tiene que 1 es cota superior. Mostremos ahora que 1 es supremo. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $m, n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - \varepsilon < \frac{m}{m(n+1)+1}.$$

Es decir, queremos encontrar *alguna* solución a la inecuación anterior sobre $m, n \in \mathbb{N}$. Intentaremos encontrar una solución con $n = 0$ (para simplificar el proceso). Es decir, queremos encontrar alguna solución de

$$1 - \varepsilon < \frac{m}{m+1}. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \frac{m}{m+1} &\iff 1 - \frac{m}{m+1} < \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{m+1} < \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} < m+1 \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 < m \\ &\iff \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < m. \end{aligned}$$

Por la propiedad arquimedeana de los reales, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $(1-\varepsilon)/\varepsilon < m$ y $n = 0$, entonces

$$1 - \varepsilon < \frac{m}{m(n+1)+1}$$

y se concluye que 1 es supremo de A. □

Problema 3.

a) Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Determine si el conjunto $f([0,1])$ es acotado superiormente, calcule el supremo y considere si tiene máximo.

b) Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos que cumples: $A \cup B = \mathbb{R}$ y todo elemento de A es menor que todo elemento de B. muestre que existe un número α tal que $\forall a \in A, \forall b \in B,\ a \leq \alpha \leq b$. Muestre que α es único.

Solución. *a)* Se tiene que $f(x) \leq f(1)$ para todo $x \in [0,1]$ pues $x \leq 1$ y se sigue que $f([0,1])$ es acotado superiormente. Como $f(0) \in f([0,1])$, $f([0,1]) \neq \emptyset$. Se sigue del axioma del supremo que $f([0,1])$ tiene supremo α. Como $f(1) \in f([0,1])$, $f(1) \leq \alpha$ pero, además, $f(1)$ es cota superior por lo que, por definición de supremo, $f(1) = \alpha$. Finalmente, como $f(1) \in f([0,1])$, se sigue que $f(1)$ es el máximo de este conjunto.

b) Sea $b \in B$. Entonces b es cota superior de A, conjunto no vacío. Sea $\alpha = \sup A$. Se sigue que $a \leq \alpha$ para cada $a \in A$. Sea $b \in B$, entonces b es cota superior de A y, como α es la menor cota superior, $\alpha \leq b$. se concluye que $\forall a \in A, \forall b \in B,\ a \leq \alpha \leq b$.

Sea β tal que $\forall a \in A, \forall b \in B\ a \leq \beta \leq b$, entonces β es cota superior de A con lo que $\alpha \leq \beta$. Por contradicción, sea $\alpha < \beta$ y sea $x \in (\alpha, \beta)$. Claramente $x \notin A$ pues es mayor que su supremo, además, $x \notin B$ pues $\beta \leq b$ para cada elemento de $b \in B$. Es decir, $x \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B) = \emptyset$ lo que no hace sentido. Se concluye que α es único.

□

Problema 4. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos acotados superiormente. Demuestre que*

a) Existe $\sup(A \cup B)$

b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

Solución. *a)* Sea α el supremo de A y β una el supremo de B (existen pues son acotados no vacíos). Se sigue que $\max \alpha, \beta$ es cota superior de $A \cup B$ pues si $x \in A \cup B$ entonces, si $x \in A$, $x \leq \alpha \leq \max \alpha, \beta$ y, si $x \in B$, entonces $x \leq \beta \leq \max \alpha, \beta$. Se sigue que $A \cup B$ es acotado. Además, $A \cup B$ es no vacío pues $A \subseteq A \cup B$. Se sigue que $A \cup B$ tiene supremo.

b) Sea $M = \max\{\alpha, \beta\}$. Vimos ya que M es cota superior de $A \cup B$. Mostremos que es supremo. Sea $\varepsilon > 0$, sea $a \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < a$ y $b \in B$ tal que $\beta - \varepsilon < b$. Entonces $\alpha - \varepsilon < \max\{a, b\}$ y $\beta - \varepsilon < \max\{a, b\}$, es decir, $\alpha, \beta < \max\{a, b\} + \varepsilon$ y se concluye que $M - \varepsilon < \max\{a, b\}$.

□

Problema 5. *Definimos* $\|h\| = \sup\{|h(x)| \mid x \in [0,1]\}$ *para cualquier función acotada* $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.
Demuestre que $\| \bullet \|$ *es una norma. Es decir, para cada* $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *acotadas y para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
3. $\|f\| = 0 \iff f = o$

donde $o\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *está definida mediante* $x \mapsto 0$. *Recuerde que estas son las tres propiedades más importantes del valor absoluto (si remplazamos* $\| \bullet \|$ *por* $| \bullet |$*).*

Solución. Como h es acotada, $|h(x)|$ será menor que el valor absoluto de una de las cotas de $h(x)$ y se sigue que, como $h([0,1])$ es no vacío, se sigue que $\|h\|$ está bien definido. Sea $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ acotadas. $\forall x \in [0,1]$, $(|f(x)| \leq \|f\| \wedge |g(x)| \leq \|g\|)$ por lo que $\|f\| + \|g\| \geq |f(x)| + |g(x)| \geq |f(x) + g(x)|$. Es decir, $\|f\| + \|g\|$ es cota superior de $\{|f(x) + g(x)| \mid x \in [0,1]\}$ con lo que $\|f\| + \|g\| \geq \|f + g\|$ pues $\|f + g\|$ es la menor cota superior del conjunto.

Sea $o(x) = 0$ para cada $x \in [0,1]$. Entonces $\|o\| = \sup\{|o(x)| \mid x \in [0,1]\} = \sup\{0\} = 0$. Además, si $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ es acotado y $\|f\| = 0$, entonces $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq 0$ y se sigue que $f(x) = 0$ para cada $x \in [0,1]$ y se concluye que $f = o$. Se concluye que $\|f\| = 0 \iff f = o$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 0$, por la parte anterior $\|\lambda f\| = 0 = |\lambda| \|f\|$. Desde ahora asumiremos $\lambda \neq 0$. Se tiene que $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq \|f\|$ y se sigue que $|\lambda f(x)| \leq |\lambda| \|f\|$ con lo que $|\lambda| \|f\|$ es cota superior de $\{|\lambda f(x)| \mid x \in [0,1]\}$ por lo que $\|\lambda f\| \leq |\lambda| \|f\|$ pues $\|\lambda f\|$ es la menor cota superior del conjunto. Se tiene además que $\forall x \in [0,1]$, $|\lambda f(x)| \leq \|\lambda f\|$, se sigue que $|f(x)| \leq \|\lambda f\|/|\lambda|$ y se sigue que $\|f\| \leq \|\lambda f\|/|\lambda|$ con lo que podemos concluir que $|\lambda| \|f\| \leq \|\lambda f\|$ y se tiene $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$. □