MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
9 de mayo de 2025

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 8

El Supremo

Problema 1.

a) *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ una cota superior. Muestre que* $\sup A = \alpha$ *si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ \alpha - \varepsilon < a.$$

De manera similar, muestre que, si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A, entonces $\inf A = \beta$ *si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ a < \beta + \varepsilon.$$

b) *Sea γ un número real positivo. Sea $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r \in \mathbb{Q} \wedge r < \gamma\}$. Muestre que A tiene supremo y calcúlelo.*

Problema 2. *Sea*

$$A = \left\{ \frac{m}{m(n+1)+1} \middle| m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Muestre que $\sup A = 1$.

Problema 3.

a) *Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Determine si el conjunto $f([0,1])$ es acotado superiormente, calcule el supremo y considere si tiene máximo.*

b) *Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos que cumples: $A \cup B = \mathbb{R}$ y todo elemento de A es menor que todo elemento de B. muestre que existe un número α tal que $\forall a \in A, \forall b \in B,\ a \leq \alpha \leq b$. Muestre que α es único.*

Problema 4. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos acotados superiormente. Demuestre que*

a) *Existe* $\sup(A \cup B)$

b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

Problema 5. *Definimos $\|h\| = \sup\{|h(x)| \mid x \in [0,1]\}$ para cualquier función acotada $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.*
Demuestre que $\| \bullet \|$ es una norma. Es decir, para cada $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ acotadas y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
3. $\|f\| = 0 \iff f = o$

donde $o\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ está definida mediante $x \mapsto 0$. Recuerde que estas son las tres propiedades más importantes del valor absoluto (si remplazamos $\| \bullet \|$ por $| \bullet |$).