

MA1001-6 Introducción al Cálculo-2023.

Profesor: Jessica Trespalacios J.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

8 de mayo de 2025



PAUTA AUXILIAR 7

Trigonometría

Problema 1. Muestre que

$$\frac{1}{\cot(x) + \cot^3(x)} + \frac{1}{\tan(x) + \tan^3(x)} + \sin(2x) = \sec(x) \csc(x)$$

Solución. Notando que si $\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 0$ la expresión no hace sentido, si x es tal que esto no se cumple, entonces, si κ el lado derecho de la expresión,

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{\cot(x)[1 + \cot^2(x)]} + \frac{1}{\tan(x)[1 + \tan^2(x)]} + \sin(2x) \\ &= \frac{1}{\cot(x) \csc^2(x)} + \frac{1}{\tan(x) \sec^2(x)} + \sin(2x) \\ &= \tan(x) \sin^2(x) + \cot(x) \cos^2(x) + \sin(2x) \\ &= \tan(x) \sin^2(x) + \cot(x) \cos^2(x) + 2 \sin(x) \cos(x) \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \sin(x) \cos(x) \kappa &= \sin^4(x) + \cos^4(x) + 2 \sin(x) \cos(x) \\ &= (\sin^2(x) + \cos^2(x))^2 \\ &= 1 \\ \therefore \kappa &= \frac{1}{\sin(x) \cos(x)}. \end{aligned}$$

□

Problema 2. Resolver la ecuación

$$\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = 1 \quad (1)$$

Solución. Veremos primero si hay solución en $[-\pi/2, \pi/2]$. En este caso $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

$$\begin{aligned} (1) &\iff \sqrt{3 - 3\sin^2(x)} + \sin(x) = 1 \\ &\iff \sqrt{3 - 3\sin^2(x)} = 1 - \sin(x) \\ &\implies 3 - 3\sin^2(x) = \sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 \\ &\iff 4\sin^2(x) - 2\sin(x) - 2 = 0 \\ &\iff 4\sin^2(x) - 4\sin(x) + 2\sin(x) - 2 = 0 \\ &\iff 4\sin(x)(\sin(x) - 1) + 2(\sin(x) - 1) = 0 \\ &\iff (\sin(x) - 1)(4\sin(x) + 2) = 0 \\ &\iff 4(\sin(x) - 1)(\sin(x) + 1/2) = 0 \\ &\iff \sin(x) = 1 \vee \sin(x) = -1/2 \\ &\iff x = \pi/2 \vee x = -\pi/6 \end{aligned}$$

Veremos si hay solución en $[-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, en este caso $\cos(x) = -\sqrt{1 - \sin^2(x)}$

$$\begin{aligned} (1) &\iff -\sqrt{3 - 3\sin^2(x)} + \sin(x) = 1 \\ &\iff -\sqrt{3 - 3\sin^2(x)} = 1 - \sin(x) \\ &\iff \text{Falso} \end{aligned}$$

Pues el lado derecho es no negativo y el lado izquierdo es no positivo, es decir, solo pueden llegar a ser iguales si ambos lados son cero pero el lado derecho no se hace cero en $[-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$.

Con esto, tenemos que los únicos candidatos a soluciones en $[-\pi, \pi]$ serán $\{\pi/2, -\pi/6\}$ es fácil verificar que estas son efectivamente soluciones de la ecuación (1). Como $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$ es 2π -periódica, se sigue que los ceros serán

$$\{\pi/2 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/6 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

□

Problema 3.

a) Considere el triángulo $\triangle ABC$ de lados a , b y c , y ángulos opuestos α , β y γ , respectivamente.

- (I) Use el teorema del coseno para demostrar que $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab \cos \gamma + 2ac \cos \beta + 2bc \cos \alpha$.
- (II) El teorema del seno nos indica que $\sin(\alpha)/a = \sin(\beta)/b = \sin(\gamma)/c$. Llamando K al valor común de esos tres cuocientes y siendo M al área del triángulo $\triangle ABC$, demuestre que $M = \frac{1}{2}Kabc$.
- (III) Utilizando lo anterior, demuestre que

$$4M (\cot(\alpha) + \cot(\beta) + \cot(\gamma)) = a^2 + b^2 + c^2.$$

b) Encuentre todos los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$1 - \cos(2x) + 3 \cos(x) = 0. \quad (2)$$

Solución.

a)

- (I) El teorema del coseno nos da las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned} \right\}$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha + a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta + a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ \iff a^2 + b^2 + c^2 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc \cos \alpha - 2ac \cos \beta - 2ab \cos \gamma \\ \iff 2bc \cos \alpha + 2ac \cos \beta + 2ab \cos \gamma &= a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

- (II) El área del triángulo será la mitad de la base por la altura. Tomaremos a como la base. Si h es la altura de esta base, entonces $h = c \sin(\beta) = bc \sin(\beta)/b = bcK$. Se sigue que $M = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}abcK$.

(III)

$$\begin{aligned} 4M (\cot(\alpha) + \cot(\beta) + \cot(\gamma)) &= 4M \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} + \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \right) \\ &= 2Kabc \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} + \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \right) \\ &= 2K (K^{-1}bc \cos(\alpha) + K^{-1}ac \cos(\beta) + K^{-1}ab \cos(\gamma)) \\ &= 2bc \cos(\alpha) + 2ac \cos(\beta) + 2ab \cos(\gamma) \\ &= a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(2) &\iff 1 - \cos^2(x) + \sin^2(x) + 3\cos(x) = 0 \\
&\iff 1 - \cos^2(x) + 1 - \cos^2(x) + 3\cos(x) = 0 \\
&\iff 2\cos^2(x) - 3\cos(x) - 2 = 0 \\
&\iff 2\cos^2(x) - 4\cos(x) + \cos(x) - 2 = 0 \\
&\iff 2\cos(x)[\cos(x) - 2] + [\cos(x) - 2] = 0 \\
&\iff (2\cos(x) + 1)(\cos(x) - 2) = 0 \\
&\iff 2(\cos(x) + 1/2)(\cos(x) - 2) = 0 \\
&\iff \cos(x) = -1/2 \vee \cos(x) = 2 \\
&\iff \cos(x) = -1/2 \\
&\iff x = 2k\pi \pm \arccos(-1/2) \\
&\iff x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

□

Problema 4. Muestre que

$$a) \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$b) \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$c) \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$d) \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$e) \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Solución. a) Notemos que $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ con lo que $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} \\
&= \sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2} \\
&= \sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}$$

Remplazando cos por sin, sin por cos y arcsin por arccos, se obtiene la otra igualdad.

b) Notemos que $\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$, es decir $\sec(\arctan(x)) \geq 0$ y se sigue que

$$\begin{aligned}
\cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sec(\arctan(x))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan(x))}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan(\arctan(x)))^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.
\end{aligned}$$

Donde se utilizó $\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1$

c) Notemos que $\operatorname{sgn}(\arctan(x)) = \operatorname{sgn}(x)$.

$$\begin{aligned}\sin(\arctan(x)) &= \operatorname{sgn}(\arctan(x))\sqrt{1 - \cos^2(\arctan(x))} \\ &= \operatorname{sgn}(\arctan(x))\sqrt{1 - [\cos(\arctan(x))]^2} \\ &= \operatorname{sgn}(x)\sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \\ &= \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(x)|x|}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\tan(\arcsin(x)) &= \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\tan(\arccos(x)) &= \frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\end{aligned}$$

□