MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.
Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
25 de abril de 2025

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 5

Funciones

Problema 1. *Sea f una función definida en los reales que es no-nula. Suponga que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$ para cada par de reales x, y. Demuestre que $f(x) = x$. Para esto,*

(a) *Demuestre que $f(1) = 1$.*

(b) *Demuestre que $f(x) = x$ si x es racional.*

(c) *Demuestre que $f(x) > 0$ si $x > 0$.*

(d) *Demuestre que $f(x) > f(y)$ si $x > y$.*

(e) *Demuestre que $f(x) = x$.*

Problema 2. *Sea* $f(x) = \dfrac{|x|}{1-|x|}$

(a) *Determine el dominio, ceros, signos y paridad de f.*

(b) *Determine intervalos de crecimiento, decrecimiento y conjunto imagen de f.*

(c) *Determine asíntotas verticales y horizontales de f, según corresponda.*

(d) *Demuestre que en los intervalos $(1, \infty)$ y $(-\infty, -1)$, f es inyectiva.*

(e) *Bosqueje el gráfico de f.*

Problema 3. (a) *Definimos la función piso como $\lfloor x \rfloor :=$ "mayor entero n que cumple $n \leq x$". Sea $f(x) = |x - \lfloor x + 0{,}5 \rfloor|$. Muestre que $f(x)$ es periódica y encuentre su menor periodo, de existir.* ***Hint:*** *realice observaciones de f que le permitan graficar la función con suficiente detalle.*

(b) **(Propuesto).** *considere la función*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Muestre que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ es periódica. ¿Que se puede decir sobre el menor periodo de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$?

Problema 4. *Decimos que una función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es* ***convexa*** *si, para cada $\lambda \in [0,1]$ y cada $x, y \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.*

(a) *Muestre que, si f y g son convexas, entonces $f + g$ es convexa.*

(b) *Muestre que si f es convexa creciente y g es convexa, entonces $f \circ g$ es convexa.*

(c) **(Propuesto).** *Muestre que si f es convexa y g cumple que $\forall a, x, y \in \mathbb{R}$, $g(ax + (1-a)y) = ag(x) + (1-a)g(y)$, entonces $f \circ g$ es convexa.*

(d) *Muestre que $h(x) = x + (x+1)^2$ es convexa.*