

MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.

Profesora: Jessica Trespalacios J.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

25 de abril de 2025



PAUTA AUXILIAR 6

Trigonometría

Problema 1.

(a) Muestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \cos(x + y) = 0 \implies \sin(x + 2y) = \sin(x)$$

(b) Muestre que

$$\cos^2(x) - \sin^2(y) = \cos(x - y) \cos(x + y)$$

Solución.

(a) Se tiene que $\cos(x + y) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x + y = \pi/2 + k\pi$. De esto se sigue que $y = \pi/2 + k\pi - x$ y, por lo tanto, $x + 2y = \pi + 2k\pi - x$. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} \sin(x + 2y) &= \sin(\pi + 2k\pi - x) \\ &= \sin(2\pi k + [\pi - x]) \\ &= \sin(\pi - x) \\ &= \sin(x) \end{aligned}$$

(b) Se tiene que

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y) \\ \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \end{aligned}$$

Con lo que

$$\begin{aligned} \cos(x - y) \cos(x + y) &= \cos^2(x) \cos^2(y) - \sin^2(x) \sin^2(y) \\ &= \cos^2(x) \cos^2(y) - \sin^2(x) (1 - \cos^2(y)) \\ &= \cos^2(x) \cos^2(y) - \sin^2(x) + \sin^2(x) \cos^2(y) \\ &= \cos^2(x) \cos^2(y) + \sin^2(x) \cos^2(y) - \sin^2(x) \\ &= \cos^2(y) (\cos^2(x) + \sin^2(x)) - \sin^2(x) \\ &= \cos^2(y) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

□

Problema 2.

(a) Demuestre que

$$\forall x, y \in \text{Dom}(\tan), \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

(b) Demuestre que si $x + y + z = \pi$, $y, x, y, x \in \text{Dom}(\tan)$, entonces

$$\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) = \tan(x) \tan(y) \tan(z)$$

(c) ¿Que se puede decir sobre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, x_1 + \dots + x_n = \pi \implies \tan(x_1) + \dots + \tan(x_n) = \tan(x_1) \cdots \tan(x_n)?$$

Solución.

(a)

$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\ &= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right) \cos(x)\cos(y)}{\left(1 - \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right) \cos(x)\cos(y)} \\ &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}. \end{aligned}$$

(b) Podemos escribir $x+y = \pi - z$, y tomando $\tan$ (y usando la identidad de tangente de la suma) obtenemos

$$\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} = \frac{\tan(\pi) - \tan(z)}{1 + \tan(\pi)\tan(z)}.$$

Como $\tan(\pi) = 0$,

$$\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} = -\tan(z)$$

de donde obtenemos que

$$\tan(x) + \tan(y) = -\tan(z) + \tan(x)\tan(y)\tan(z).$$

Sumando $\tan(z)$ a ambos lados obtenemos la igualdad deseada.

(c) Sea $n = 4$, $x_1, x_2, x_3, x_4 = \pi/4$. Entonces, como $\tan(\pi/4) = 1$,

$$\tan(x_1) + \dots + \tan(x_4) = 4 \tan(\pi/4) = 4$$

y

$$\tan(x_1) \cdots \tan(x_4) = \tan(\pi/4)^4 = 1$$

y claramente $1 \neq 4$ con lo que la proposición es falsa.

□

Problema 3.

(a) Muestre que

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos kx.$$

(b) Concluya que

$$\frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Solución.

(a) Se tiene que, usando $\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) &= 2 \sin\left(\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \left(k - \frac{1}{2}\right)x}{2}\right) \cos\left(\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)x + \left(k - \frac{1}{2}\right)x}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx) \end{aligned}$$

(b) De la parte anterior se tiene que

$$\cos(kx) = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \cos(1x) + \cdots + \cos(nx) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(1 - \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cdots + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\sin\left(1 + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(1 - \frac{1}{2}\right)x + \cdots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x \right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\sin\left(1 + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(1 - \frac{1}{2}\right)x + \cdots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x \right) \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(1 + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(1 - \frac{1}{2}\right)x + \cdots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x \right) \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donde se utilizó que, en la suma, cada termino sumado se cancela con sub siguiente restado y cada termino restado se cancela con el segundo sumado que estaba antes (dejando así solo el penúltimo término de la suma).

□