MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.
Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
25 de abril de 2025

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta Auxiliar 5

Funciones

Problema 1. *Sea f una función definida en los reales que es no-nula. Suponga que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$ para cada par de reales x, y. Demuestre que $f(x) = x$. Para esto,*

(a) *Demuestre que $f(1) = 1$.*

(b) *Demuestre que $f(x) = x$ si x es racional.*

(c) *Demuestre que $f(x) > 0$ si $x > 0$.*

(d) *Demuestre que $f(x) > f(y)$ si $x > y$.*

(e) *Demuestre que $f(x) = x$.*

Solución. (a) Sea x_0 un real tal que $f(x_0) \neq 0$. Entonces $f(x_0) = f(x_0 \cdot 1) = f(x_0)f(1)$ y se sigue que $f(1) = 1$.

(b) Partiremos mostrando esto para el cero, luego para los naturales, luego para los enteros y finalmente para los racionales. Se tiene que $f(0) = f(2 \cdot 0) = f(2)f(0) = f(1+1)f(0) = (f(1)+f(1))f(0) = 2f(0)$. Se sigue que $f(0) = 0$. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus 0$, luego $f(n) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\cdots+f(1)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ veces}} = n$ (formalice, usando inducción, el uso de "n veces").
Sea m un entero. Si no es negativo, estamos listos, si es negativo, entonces $f(m) = f(-1|m|) = f(-1)f(|m|) = f(-1)|m|$ y estamos listos pues $f(-1) = -1$: $0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) = 1 + f(-1)$.
Mostremos la propiedad ahora para un racional pq^{-1} con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $f(pq^{-1}) = f(p)f(q^{-1}) = pf(q^{-1})$ y estamos listos pues $1 = f(1) = f(qq^{-1}) = f(q)f(q^{-1}) = qf(q^{-1})$ con lo que $f(q^{-1}) = q^{-1}$ y $f(pq^{-1}) = pq^{-1}$.

(c) Sea $x > 0$. Luego $f(x) = f(\sqrt{x}^2) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$. Además, $f(x) \neq 0$ pues, de ser así, entonces $f(a) = f(xax^{-1}) = f(x)f(a)f(x^{-1}) = 0$ para todo a, lo que contradice el hecho que f es no-nula.

(d) Sea $x < y$, luego $y - x > 0$. Por la parte anterior, $0 < f(y-x) = f(y+(-x)) = f(y)+f(-x) = f(y)+f(-1x) = f(y)-f(x)$ con lo que $f(x) < f(y)$.

(e) Asumamos que existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq x$. Asumamos $x < f(x)$ (el otro caso es análogo). Sean q racional tal que $x < q < f(x)$. Luego $x < q = f(q) < f(x)$, es decir, $x < q$ y $f(q) < f(x)$, lo que contradice el resultado anterior. Note que aquí se utilizó el hecho de que entre cada par de reales existe un racional o, equivalentemente, existe un racional en cada intervalo abierto.

□

Problema 2. *Sea* $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$

(a) *Encuentre su dominio, ceros y signos.*

(b) *Pruebe que f es inyectiva.*

(c) *Demuestre que el recorrido de f es $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.*

(d) *Encuentre la inversa de f y explicite su dominio y recorrido.*

Solución. (*a*) El único momento en el que la expresión puede no hacer sentido es cuando $2x+1=0$ (es decir, $x=-1/2$). Se sigue que $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$. La función se hace cero si y solo si $x+1=0$, es decir, si $x=-1$. Se concluye que $\{-1\}$ es el conjunto de los ceros de la función. Para los signos, consideramos la siguiente tabla:

	$(-\infty,-1)$	$\{-1\}$	$(-1,-1/2)$	$(-1/2,\infty)$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+1}{2x+1}$	$+$	0	$-$	$+$

Cuadro 1: Signo de los componentes que conforman $f(x)$.

(*b*) Sea $f(x)=f(y)$. Luego

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{y+1}{2y+1} &\iff (x+1)(2y+1)=(y+1)(2x+1)\\ &\iff 2xy+x+2y+1=2xy+y+2x+1\\ &\iff x+2y=y+2x\\ &\iff y=x\end{aligned}$$

con lo que f es inyectiva.

(*c*) Sea $y\neq 1/2$. Queremos un x tal que $f(x)=y$. Es decir, hay que mostrar que $f(x)=y$ tiene solución como ecuación en $x\in D(f)$ con $y\neq 1/2$:

$$\begin{aligned}f(x)=y &\iff \frac{x+1}{2x+1}=y\\ &\iff x+1=2xy+y\\ &\iff x-2xy=y-1\\ &\iff x(1-2y)=y-1\\ &\iff x=\frac{y-1}{1-2y}\end{aligned}$$

donde se usó que $y\neq 1/2$ para poder dividir por $(1-2y)$. Con lo que $f((y-1)/(1-2y))=y$ para cada $y\neq 1/2$ y $\mathbb{R}\setminus\{1/2\}\subseteq R(f)$. Mostremos ahora que $1/2$ no tiene preimagen: Por contradicción, sea $x\in D(f)$ tal que $f(x)=1/2$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2x-1}=\frac{1}{2} &\iff x+1=x-\frac{1}{2}\\ &\iff 1=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Es decir, $\mathbb{R}\setminus\{1/2\}=R(f)$.

(*d*) Para encontrar la función inversa, resolvemos la ecuación sobre $x\in D(f)$ para cada $y\in R(f)$:

$$\begin{aligned}f(x)=y &\iff \frac{x+1}{2x+1}=y\\ &\iff x+1=2xy+y\\ &\iff x-2xy=y-1\\ &\iff x(1-2y)=y-1\\ &\iff x=\frac{y-1}{1-2y}\\ &\iff f^{-1}(y)=\frac{y-1}{1-2y}\end{aligned}$$

Como f^{-1} es la función inversa de f, se tendrá que $D(f^{-1})=R(f)$ y $R(f^{-1})=D(f)$.

□

Problema 3. (*a*) *Definimos la función piso como* $\lfloor x \rfloor :=$ *"mayor entero* n *que cumple* $n \leq x$*". Sea* $f(x) = |x - \lfloor x + 0{,}5 \rfloor|$. *Muestre que* $f(x)$ *es periódica y encuentre su menor periodo, de existir.* ***Hint:*** *realice observaciones de* f *que le permitan graficar la función con suficiente detalle.*

Solución. Sea $T > 0$. Queremos que $\forall x,\ f(x+T) = f(x)$. Notemos que, para cada $x \in \mathbb{Z}$, se tiene que $f(x) = 0$. Además, para cada $x \in \mathbb{Z}+0{,}5$, se tiene que (escribiendo $x = n+0{,}5$ para algún $n \in \mathbb{Z}$) $f(x) = |n+0{,}5-\lfloor n+0{,}5+0{,}5 \rfloor| = |n+0{,}5-n-1| = 0{,}5$. Además, en los intervalo $(n, n+0{,}5)$ la función $f(x) = |x-n| = x-n$, es decir, es la recta que una a los puntos $(n, 0)$ y $(n+0{,}5, 0{,}5)$ y en el intervalo $(n+0{,}5, n+1)$ se tiene tiene que $f(x) = |x-n-1| = n+1-x$ con lo que en este intervalo, la función corresponde a la recta que una a los puntos $(n+0{,}5, 0{,}5)$ y $(n+1, 0)$. Con esto, el gráfico de la función es

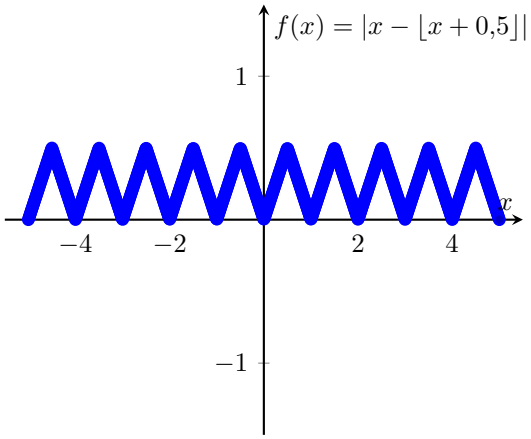

Figura 1: Diagrama del gráfico G_f de la función $f(x) = |x - \lfloor x + 0{,}5 \rfloor|$.

Esto nos sugiere un periodo de 1. En efecto

$$f(x+1) = |x+1-\lfloor x+1+0{,}5 \rfloor| = |x+1-(1+\lfloor x+0{,}5 \rfloor)| = |x-\lfloor x+0{,}5 \rfloor| = f(x).$$

Claramente 1 es el menor periodo pues $f(0{,}5+T) < 0{,}5$ para todo $T \in (0,1)$. □

(*b*) **(Propuesto).** *considere la función*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Muestre que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ *es periódica. ¿Que se puede decir sobre el menor periodo de* $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$*?*

Problema 4. *Decimos que una función* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es* ***convexa*** *si, para cada* $\lambda \in [0,1]$ *y cada* $x, y \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

a) Muestre que, si f *y* g *son convexas, entonces* $f+g$ *es convexa.*

Solución. Sea $\lambda \in [0,1]$ y $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \\ &= \lambda(f(x)+g(x)) + (1-\lambda)(f(y)+g(y)) \\ &= \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)\end{aligned}$$

con lo que $f+g$ es convexa. □

b) Muestre que si f es convexa creciente y g es convexa, entonces $f \circ g$ es convexa.

Solución. Sea $\lambda \in [0,1]$ y $x, y \in \mathbb{R}$. Notemos que $(f \circ g)(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(g(\lambda x + (1-\lambda)y))$. Como g es convexa, entonces

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y).$$

Además, como f es creciente, entonces

$$f(g(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)). \tag{1}$$

Ahora, como f es convexa,

$$f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)) \leq \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y)), \tag{2}$$

como $\lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y)) = \lambda(f \circ g)(x) + (1-\lambda)(f \circ g)(y)$, juntando (1) y (2), se tiene que

$$f(g(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y)).$$

Es decir,

$$(f \circ g)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda(f \circ g)(x) + (1-\lambda)(f \circ g)(y).$$

y se sigue que $f \circ g$ es convexa. □

c) **(Propuesto).** *Muestre que si f es convexa y g cumple que $\forall a, x, y \in \mathbb{R}$, $g(ax + (1-a)y) = ag(x) + (1-a)g(y)$, entonces $f \circ g$ es convexa.*

d) Muestre que $h(x) = x + (x+1)^2$ es convexa.

Solución. Como $x \mapsto x$ es convexa y se tiene que la suma de funciones convexas es convexa, basta mostrar que $x \mapsto (x+1)^2$ es convexa. Procederemos a mostrar esto.

Mostraremos primero que $f(x) = x^2$ es convexa. Sea $\lambda \in [0,1]$ y $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\ &= \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2 \end{aligned}$$

Además,

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2.$$

Mostraremos que la resta de estos dos elementos es no-negativa:

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy - (1-\lambda)^2 y^2 \\ &= \lambda(x^2 - \lambda x^2) + (1-\lambda)(y^2 - (1-\lambda)y^2) - 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &= \lambda(1-\lambda)x^2 + (1-\lambda)\lambda y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &= \lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2 - 2xy) \\ &= \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

y se sigue que $f(x) = x^2$ es convexa. Además, si $g(x) = x + 1$, entonces

$$\begin{aligned} g(ax + (1-a)y) &= ax + (1-a)y + 1 \\ &= ax + (1-a)y + a + (1-a) \\ &= ax + a + (1-a)y + (1-a) \\ &= a(x+1) + (1-a)(y+1) \\ &= ag(x) + (1-a)g(x) \end{aligned}$$

con lo que, usando la parte anterior, $f \circ g$ es convexa y se concluye que $h = x + (x+1)^2 = x + (f \circ g)(x)$ es convexa. □