MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.
Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
11 de abril de 2025

Pauta Auxiliar 4

Espacios Geométricos y Funciones

Problema 1. *Sea $a > b > 0$. Considere la elipse de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. La recta $y = bx/a$ intersecta a la elipse en los puntos P y R (P con coordenadas positivas). Determinar el área del rectángulo inscrito en la elipse, que tiene como diagonal el trazo PR y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.*

Solución. Queremos encontrar las coordenadas de $P := (p_1, p_2)$ y $Q := (q_1, q_2)$. Por enunciado, P y Q serán las soluciones de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} = 1 \\ &p_2 = \frac{b}{a}p_1 \end{aligned}\right\}$$

Reemplazando el valor de p_2 en la primera ecuación por el de la segunda, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2}{a^2} + \frac{(\frac{b}{a}p_1)^2}{b^2} = 1 &\iff p_1^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{(\frac{b}{a})^2}{b^2}\right) = 1 \\ &\iff p_1^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right) = 1 \\ &\iff p_1^2 = \frac{a^2}{2} \\ &\iff p_1 \in \left\{\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right\} \end{aligned}$$

Denotaremos por x_1 la solución positiva y x_2 la solución negativa. Introduciendo x_1 y x_2 en la segunda ecuación del sistema, obtenemos $y_1 = bx_1/a$ y $y_2 = bx_2/a$. Con esto, las soluciones del sistema son

$$S := \left\{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-b}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Como sabemos que $P, Q \in S$ y, además, P tiene coordenadas positivas, $P = (a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$ y por ende $Q = (-a/\sqrt{2}, -b/\sqrt{2})$. El área de un rectángulo está definido como base por altura y, como los lados del rectángulo de diagonal PQ tiene lados paralelos a los ejes, los largos de los lados será la distancia de cada una de las coordenadas de P y Q, es decir

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left|\frac{a}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-a}{\sqrt{2}}\right)\right| \cdot \left|\frac{b}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-b}{\sqrt{2}}\right)\right| \\ &= \left|\frac{2a}{\sqrt{2}}\right| \cdot \left|\frac{2b}{\sqrt{2}}\right| \\ &= |a\sqrt{2}| \cdot |b\sqrt{2}| \\ &= 2ab \end{aligned}$$

□

Problema 2. *Sea C la circunferencia $x^2+y^2=R^2$. Sea L la recta de ecuación $y=-R$. Sea $k>0$; encuentre el lugar geométrico de todos los puntos P tal que la distancia de P a L es igual a k veces el largo de la recta tangente a C que pasa por P (denotamos por T_P a algún punto en C tal que la recta PT_P es tangente).*

Solución. Notemos que, por Pitágoras, $d(P,T_P)^2+d(0,T_P)^2=d(0,P)^2$ con lo que $d(P,T_P)=\sqrt{d(0,P)^2-d(0,T_P)^2}=\sqrt{p_1^2+p_2^2-R^2}$. Sea $\mathscr{L}$ el lugar geométrico.

$$\begin{aligned}
&P \in \mathscr{L}\\
\iff &d(P,L)=kd(P,T_P)\\
\iff &\sqrt{(p_1-p_1)^2+(p_2+R)^2}=k\sqrt{p_1^2+p_2^2-R^2}\\
\iff &|p_2+R|=k\sqrt{p_1^2+p_2^2-R^2}\\
\iff &(p_2+R)^2=k^2(p_1^2+p_2^2-R^2)\\
\iff &p_2^2+2Rp_2+R^2=k^2p_2^2+k^2p_1^2-k^2R^2\\
\iff &(1-k^2)p_2^2+2Rp_2+(1+k^2)R^2=k^2p_1^2
\end{aligned}$$

Nos ponemos en 2 casos: $k=1$ y $k\neq 1$.

Si $k=1$,

$$\begin{aligned}
\iff &2Ry+2R^2=p_1^2\\
\iff &p_2=\frac{1}{2R}p_1^2-R
\end{aligned}$$

con lo que, para $k=1$, $\mathscr{L}$ es una parábola.

Ahora, si $k \neq 1$

$$
\begin{aligned}
&\iff (1-k^2)p_2^2 + 2Rp_2 + (1+k^2)R^2 = k^2p_1^2 \\
&\iff p_2^2 + 2p_2\frac{R}{1-k^2} + \frac{1+k^2}{1-k^2}R^2 = \frac{k^2}{1-k^2}p_1^2 \\
&\iff p_2^2 + 2p_2\frac{R}{1-k^2} + \frac{R^2}{(1-k^2)^2} - \frac{R^2}{(1-k^2)^2} + \frac{1+k^2}{1-k^2}R^2 = \frac{k^2}{1-k^2}p_1^2 \\
&\iff \left(p_2 + \frac{R}{1-k^2}\right)^2 - \frac{R^2}{(1-k^2)^2} + \frac{1+k^2}{1-k^2}R^2 = \frac{k^2}{1-k^2}p_1^2 \\
&\iff \left(p_2 + \frac{R}{1-k^2}\right)^2 + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \frac{1}{(1-k^2)^2}\right)R^2 = \frac{k^2}{1-k^2}p_1^2 \\
&\iff \left(p_2 + \frac{R}{1-k^2}\right)^2 + \frac{(1+k^2)(1-k^2)-1}{(1-k^2)^2}R^2 = \frac{k^2}{1-k^2}p_1^2 \\
&\iff \left(p_2 + \frac{R}{1-k^2}\right)^2 + \frac{-k^4}{(1-k^2)^2}R^2 = \frac{k^2}{1-k^2}p_1^2 \\
&\iff \frac{-k^4}{(1-k^2)^2}R^2 = \frac{k^2}{1-k^2}p_1^2 - \left(p_2 + \frac{R}{1-k^2}\right)^2 \\
&\iff -k^4(1-k^2)^{-2}R^2 = \frac{p_1^2}{(1-k^2)k^{-2}} - \left(p_2 + \frac{R}{1-k^2}\right)^2 \\
&\iff -k^4(1-k^2)^{-2}R^2 = \frac{p_1^2}{(1-k^2)k^{-2}} - \left(p_2 + \frac{R}{1-k^2}\right)^2 \\
&\iff 1 = \frac{p_1^2}{-(1-k^2)k^{-2}k^4(1-k^2)^{-2}R^2} - \frac{\left(p_2 + \frac{R}{1-k^2}\right)^2}{-k^4(1-k^2)^{-2}R^2} \\
&\iff 1 = \frac{p_1^2}{-k^2(1-k^2)^{-1}R^2} + \frac{\left(p_2 + \frac{R}{1-k^2}\right)^2}{k^4(1-k^2)^{-2}R^2} \\
&\iff 1 = \frac{\left(p_2 + \frac{R}{1-k^2}\right)^2}{k^4(1-k^2)^{-2}R^2} - \frac{p_1^2}{k^2(1-k^2)^{-1}R^2}
\end{aligned}
$$

con lo que, como $k^4(1-k^2)^{-2}R^2 > 0$, basta estudiar el signo de $k^2(1-k^2)^{-1}R^2$ y se sigue que $\mathscr{L}$ es una elipse si $k > 1$, una hipérbola si $k \in (0,1)$ p_2 una parábola si $k = 1$. □

Problema 3. *Sea $a > 0$ y considere $A = (-a, 0)$. Determine el lugar geométrico de los puntos $P = (p_1, p_2)$ del plano que satisfacen la condición: La recta vertical por P y la recta perpendicular a PA por P cortan al eje OX en los puntos Q y S respectivamente, de tal modo que el largo de la recta QS es a.*

Solución. Sea $\mathscr{L}$ es lugar geométrico. Si $P \in \mathscr{L}$, $d(Q,S)^2 + d(Q,P)^2 = d(P,S)^2$ con lo que $d(Q,S) = \sqrt{d(P,S)^2 - d(Q,P)^2}$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
& P(p_1,p_2) \in \mathscr{L} \\
\iff & d(Q,S) = a \\
\iff & \sqrt{d(P,S)^2 - d(Q,P)^2} = a \\
\iff & d(P,S)^2 - d(Q,P)^2 = a^2 \\
\iff & (p_1 - s_1)^2 + (p_2 - s_2)^2 - (p_1 - q_1)^2 - (p_2 - q_2)^2 = a^2 \\
\iff & (p_1 - s_1)^2 + (p_2 - s_2)^2 - (p_1 - p_1)^2 - (p_2 - 0)^2 = a^2 \\
\iff & (p_1 - s_1)^2 + (p_2 - s_2)^2 - p_2^2 = a^2
\end{aligned}
$$

Calculemos S. Asumamos primero que $a \neq -a$. Se tiene que la recta AP es $y = \frac{p_2-0}{p_1+a}x + c$ para algún c. Como A pertenece a esta recta, entonces $0 = -\frac{p_2}{p_1+a}a + c$ con lo que la ecuación de la recta AP es $y = \frac{p_2}{p_1+a}x + \frac{p_2}{x+a}a$. Con esto la recta que pasa por P y S es de ecuación $y = -\frac{p_1+a}{p_2}x + b$ para algún b, como P pertenece a esta recta, entonces $p_2 = -\frac{p_1+a}{p_2}p_1 + b$ y se sigue que $b = p_2 + \frac{p_1+a}{p_2}p_1$ con lo que la ecuación de la recta que pasa por PS es $y = -\frac{p_1+a}{p_2}x + p_2 + \frac{p_1+a}{p_2}p_1$. Encontrando donde intersecta esta recto con el eje OX, obtenemos $0 = -\frac{p_1+a}{p_2}x + p_2 + \frac{p_1+a}{p_2}p_1$ es decir, $x = \frac{p_2^2}{p_1+a} + p_1$. Es decir, $S = \left(\frac{p_2^2}{p_1+a} + \frac{p_2}{p_2}p_1, 0\right)$. Ahora, si $p_1 = -a$, entonces, si $p_2 \neq 0$, la ecuación para al recta perpendicular a PA es una paralela al eje OX con lo que S no está definida (el punto $(-a,p_2)$ no puede estar en $\mathscr{L}$ para $p_2 \neq 0$). Si ahora asumimos que $p_1 = -a$ y $p_2 = 0$, entonces $P = A$ con lo que no denotan una recta (una recta se define a partir de dos puntos, no 1). Con esto podemos asumir durante toda la discusión que $p_1 \neq -a$. Continuando con la cadena de equivalencias,

$$
\begin{aligned}
\iff & \left(p_1 - \frac{p_2^2}{p_1+a} - p_1\right)^2 + p_2^2 - p_2^2 = a^2 \\
\iff & \left(-\frac{p_2^2}{p_1+a}\right)^2 = a^2 \\
\iff & \left(\frac{p_2^2}{p_1+a}\right)^2 = a^2 \\
\iff & \left|\frac{p_2^2}{p_1+a}\right| = a \\
\iff & \frac{p_2^2}{|p_1+a|} = a \\
\iff & p_2^2 = a|p_1+a| \\
\iff & p_2^2 = \begin{cases} a(p_1+a), & p_1 \geq -a \\ -a(p_1+a), & p_1 \leq -a \end{cases}
\end{aligned}
$$

y el lugar geométrico es la unión de dos parábolas excluyendo el punto A. $\square$