MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
21 de marzo de 2025

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

PAUTA AUXILIAR 2

Axiomas de Orden de los Números Reales

Problema 1 (Propuesto)**.**

(*a*). *Demuestre que el valor absoluto es una norma. Es decir,*

- *desigualdad triangular:* $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leq |x| + |y|$,
- *homogeneidad absoluta:* $\forall \lambda, x \in \mathbb{R},\ |\lambda x| = |\lambda||x|$,
- *punto separante:* $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \iff x = 0$.

Estas son las tres propiedades más importantes del valor absoluto.

(*b*). *Sea* $x, y \in \mathbb{R}$. *Demuestre que*

- $|-x| = |x|$,

  Solución. Se tiene que

$$|-x| = \begin{cases} -x, & -x \geq 0, \\ -(-x), & -x < 0 \end{cases} \tag{1}$$
$$= \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x, & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$
$$= \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$
$$= |x|. \tag{4}$$

  □

- $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$,

  Solución. Se tiene que $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ (donde se utilizó la desigualdad triangular) con lo que se concluye que $|x| - |y| \leq |x - y|$. Replicando esto pero iniciando con y se concluye que $|y| - |x| \leq |x - y|$ con lo que $||x| - |y|| \leq |x - y|$. □

- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$,

  Solución. Se tiene que, para $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right||y| = \left|x\frac{|y|}{y}\right| = \left|x\frac{|y|}{\operatorname{sgn}(y)|y|}\right| = \left|\frac{x}{\operatorname{sgn}(y)}\right| = |\operatorname{sgn}(y)x| = |x|$ con lo que $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$. Donde $\operatorname{sgn}(y)$ es el signo de y: 1 para $y > 0$, -1 para $y < 0$ y 0 para $y = 0$. □

- $|x| < y \iff -y < x < y$,

Solución. Sea $|x| < y$. Si $x \geq 0$, entonces $0 \leq x < y$. Como $y > 0$, entonces $-y < 0 \leq x$ con lo que $-y < x < y$. Ahora, si $x < 0$, entonces $-x < y$, es decir, $-y < x < 0$ con lo que, como $y > 0$, $-y < x < y$ y se tiene la implicancia $\Longrightarrow$. Para la otra implicancia, Asumamos que $-y < x < y$. Si $x \geq 0$, entonces $x = |x|$, es decir, $|x| < y$ (pues $x < y$). Ahora, si $x < 0$, entonces $-x = |x|$. Como $-y < x$, entonces $-x < y$ y se concluye que $|x| < y$. Con esto se tiene que son equivalentes en todos los casos. $\square$

- $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$.

  Solución. Identico al anterior, pero usando $\leq$ en lugar de $<$. $\square$

Problema 2. *Resuelva la inecuación*

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{|x-2| - 1} \leq 0. \tag{5}$$

Solución. Primero, es necesario determinar para que valores de x la expresión hace sentido. Para esto, es necesario que $|x-2| - 1 = 0$. Es decir, hay que excluir las soluciones de

$$\begin{aligned}
|x-2| - 1 = 0 &\iff |x-2| = 1 \\
&\iff \begin{cases} x - 2 = 1, & x \geq 2 \\ 2 - x = 1, & x < 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 3, & x \geq 2 \\ x = 1, & x < 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\therefore x \notin \{1, 3\} \tag{6}$$

A partir de ahora, asumiremos $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
(5) &\iff \frac{x(x^2 + x + 1)}{|x-2| - 1} \leq 0 \\
&\iff \frac{x(x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4})}{|x-2| - 1} \leq 0 \\
&\iff \frac{x((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})}{|x-2| - 1} \leq 0
\end{aligned}$$

Dividiendo a ambos lados por el número positivo $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$,

$$\begin{aligned}
(5) &\iff \frac{x}{|x-2| - 1} \leq 0 \\
&\iff \begin{cases} \frac{x}{x-2-1} \leq 0, & x \geq 2 \\ \frac{x}{2-x-1} \leq 0, & x < 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{x}{x-3} \leq 0, & x \geq 2 \\ \frac{x}{1-x} \leq 0, & x < 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{x-3} \leq 0, & x \geq 2 \ (\star) \\ \frac{x}{1-x} \leq 0, & x < 2 \ (*) \end{cases}
\end{aligned}$$

Donde en el último paso se dividió por el número positivo x (el cual es mayor o igual que 2). Con lo que $(\star)$ y $(*)$ son dos ecuaciones simples. Claramente, $1/(x-3)$ en $(\star)$ tendrá el mismo signo que $x - 3$ por lo que el conjunto de solución de $(\star)$ será $[2, 3)$ (notar que excluimos e 3 debido a (6)). Para $(\star)$ consieramos la siguiente tabla:

	$(-\infty,0)$	$\{0\}$	$(0,1)$	$(1,2)$
x	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x}{1-x}$	$-$	0	$+$	$-$

Cuadro 1: Signo de los componentes que conforman $(*)$.

Con lo que la solución de $(\star)$ es $(-\infty,0]\cup(1,2)$.
Juntando las soluciones de $(*)$ y $(\star)$, se tiene que

$$\boxed{[-\infty,0]\cup(1,3)}$$

es la solución de la inecuación. $\square$

Problema 3. *Considere la inecuación sobre la variable real x*

$$\big||x|-a\big|<1 \tag{7}$$

donde a es un real. Encuentre el conjunto de todos los valores de a tal que la ecuación no tiene solución.

Solución. Para saber cuales valores de a hacen que el conjunto solución sea $\emptyset$, es necesario primero encontrar el conjunto solución y luego considerar como a afecta a este. Es decir, queremos solucionar (7). Se tiene que

$$\begin{aligned}
\big||x|-a\big|<1 &\iff -1<|x|-a<1\\
&\iff a-1<|x|<a+1\\
&\iff \big(a-1<|x|\big)\wedge\big(|x|<a+1\big)\\
&\iff \big(\overline{|x|\le a-1}\big)\wedge\big(-a-1<x<a+1\big)\\
&\iff \big(\overline{-a+1\le x\le a-1}\big)\wedge\big(x\in(-a-1,a+1)\big)\\
&\iff \big(\overline{x\in[-a+1,a-1]}\big)\wedge\big(x\in(-a-1,a+1)\big)\\
&\iff \big(x\notin[-a+1,a-1]\big)\wedge\big(x\in(-a-1,a+1)\big)\\
&\iff \big(x\in\big((-\infty,-a+1)\cup(a-1,\infty)\big)\big)\wedge\big(x\in(-a-1,a+1)\big)\\
&\iff x\in\big((-\infty,-a+1)\cup(a-1,\infty)\big)\cap(-a-1,a+1)
\end{aligned}$$

Como siempre $-a-1\le -a+1$ y $a-1\le a+1$, la única forma de que el conjunto solución sea vacío es is $a+1\le -a-1$. Es decir el conjunto de valores para a en los que (7) no tiene solución será

$$\boxed{(-\infty,-1]}.$$

$\square$

Problema 4. *Demuestre que, si $x_0\neq 0$, $\varepsilon>0$ y*

$$|x-x_0|<\text{mín}\left(\frac{|x_0|}{2},\frac{\varepsilon|x_0|^2}{2}\right)$$

entonces $x\neq 0$ y

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon.$$

Concluya que

$$\forall x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ |x-x_0|<\delta\implies\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon.$$

Solución. Si $x = x_0$, entonces el resultado es directo, asumiremos $x \neq x_0$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2} &\implies \big||x| - |x_0|\big| < \frac{|x_0|}{2} \\
&\implies -\frac{|x_0|}{2} < |x| - |x_0| \\
&\implies |x_0| - \frac{|x_0|}{2} < |x| \\
&\implies \frac{|x_0|}{2} < |x| \quad (\star) \\
&\implies \frac{|x_0|^2}{2} < |xx_0| \\
&\implies \frac{1}{|xx_0|} < \frac{2}{|x_0|^2} \\
&\implies \frac{|x - x_0|}{|xx_0|} < \frac{2|x - x_0|}{|x_0|^2} \\
&\implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \frac{2}{|x_0|^2}|x - x_0| \\
&\implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \frac{2}{|x_0|^2}\frac{\varepsilon|x_0|^2}{2} \quad (*) \\
&\implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donde $(*)$ se justifica mediante $|x - x_0| < \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2}$. Notemos, además, que $(\star)$ implica que $0 < |x|$ con lo que $x \neq 0$. La conclusión es directa. □

Problema 5. *Resuelva la inecuación*

$$\frac{|x - 2| + |2x + 11|}{(x - 2)\big|x + |x - 2|\big|} < \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Solución. Primero tenemos que ver los valores de x para los cuales la expiración hace sentido. Es decir, queremos excluir las soluciones de $(x - 2)\big|x - |x - 2|\big| = 0$. Claramente una solución de esta ecuación es $x = 2$, para encontrar alguna otra solución:

$$\begin{aligned}
\big|x + |x - 2|\big| = 0 &\iff |x - 2| = -x \\
&\iff \begin{cases} x - 2 = -x, & x \geq 2 \\ 2 - x = -x, & x < 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 1, & x \geq 2 \\ 2 - x = -, & x < 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Con lo que el único punto en el cual la expresión se indetermina es en $x = 2$. Asumiremos $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Nos pondremos en dos casos principales: $x > 2$ y $x < 2$.

$x > 2$:

$$\begin{aligned}
(8) \iff & \frac{x-2+2x+11}{(x-2)|x+x-2|} < \frac{1}{2} \\
\iff & \frac{3x+9}{(x-2)|2x-2|} < \frac{1}{2} \\
\iff & \frac{3x+9}{2(x-2)(x-1)} < \frac{1}{2} \\
\iff & 3x+9 < \frac{2(x-2)(x-1)}{2} \\
\iff & 3x+9 < x^2-3x+2 \\
\iff & 0 < x^2-6x-7 \\
\iff & 0 < x^2-7x+x-7 \\
\iff & 0 < (x+1)(x-7) \\
\iff & 0 < x-7 \\
\iff & 7 < x
\end{aligned}$$

Es decir, en este caso, la inecuación se satisface si $x \in (7, \infty)$. Ahora nos ponemos en el caso $x < 2$:

$$\begin{aligned}
(8) \iff & \frac{2-x+|2x+11|}{(x-2)|x+2-x|} < \frac{1}{2} \\
\iff & \frac{2-x+|2x+11|}{2(x-2)} < \frac{1}{2} \\
\iff & 2-x+|2x+11| > x-2 \\
\iff & |2x+11| > 2x-4 \\
\iff & \begin{cases} 2x+11 > 2x-4, & x \geq -11/2 \\ -2x-11 > 2x-4, & x < -11/2 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 11 > -4, & x \geq -11/2 \\ -7/4 > x, & x < -11/2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Es decir, la ecuación se satisface en este caso para $x \in \big((-\infty, -11/2) \cup [-11/2, 2)\big) = (-\infty, 2)$. Juntando ambos casos se tiene que

$$\boxed{(-\infty, 2) \cup (7, \infty)}$$

es el conjunto de las soluciones. □

Problema 6. *Sea* $0 < a < b$.

(*a*). *Muestre que* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

(*b*). *Muestre que*

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Solución. (*a*).

$$\begin{aligned}
\sqrt{b} - \sqrt{a} &= \frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\
&= \frac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\
&> 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{b} > \sqrt{a}$$

(b).

$$\begin{aligned} 0 < (a-b)^2 &\implies 0 < a^2 - 2ab + b^2 \\ &\implies 0 < a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \\ &\implies 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \\ &\implies 4ab < (a+b)^2 \\ &\implies ab < \frac{(a+b)^2}{4} \\ &\implies ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &\implies \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Además, $a < b \implies a < 2b - b \implies a + b < 2b \implies (a+b)/2 < b$ y $a < b \implies a^2 < ab \implies a < \sqrt{ab}$.

$$\therefore a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

$\square$