

MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.

Profesora: Jessica Trespalacios J.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

21 de marzo de 2025



AUXILIAR 2

Axiomas de Orden de los Números Reales

Problema 1 (Propuesto).

(a). Demuestre que el valor absoluto es una norma. Es decir,

- desigualdad triangular: $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$,
- homogeneidad absoluta: $\forall \lambda, x \in \mathbb{R}, |\lambda x| = |\lambda||x|$,
- punto separante: $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$.

Estas son las tres propiedades más importantes del valor absoluto.

(b). Sea $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que

- $||x| - |y|| \leq |x - y|$,
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$,
- $|-x| = |x|$,
- $|x| < y \iff -y < x < y$,
- $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$.

Problema 2. Resuelva la inecuación

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{|x - 2| - 1} \leq 0.$$

Problema 3. Considere la inecuación sobre la variable x

$$||x| - a| < 1$$

donde a es un real. Encuentre el conjunto de todos los valores de a tal que la ecuación no tiene solución.

Problema 4. Demuestre que, si $x_0 \neq 0$, $\varepsilon > 0$ y

$$|x - x_0| < \min\left(\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2}\right)$$

entonces $x \neq 0$ y

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon.$$

Concluya que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon.$$

Problema 5. Resuelva la inecuación

$$\frac{|x - 2| + |2x + 11|}{(x - 2)|x + |x - 2||} < \frac{1}{2}.$$

Problema 6. Sea $0 < a < b$.

(a). Muestre que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

(b). Muestre que

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$