

MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.

Profesora: Jessica Trespalacios J.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

14 de marzo de 2025



# AUXILIAR 1

## Axiomas de Cuerpo de los Números Reales

### 1. Introducción

Consideremos la proposición 1 del libro II de los Elementos de Euclides:

**Proposición 1 (Euclides).** Si de dos rectas la una se divide en cualquier número de partes iguales; el rectángulo compuesto por las dos será igual a los rectángulos contenidos por la entera, y por los segmentos de la otra.

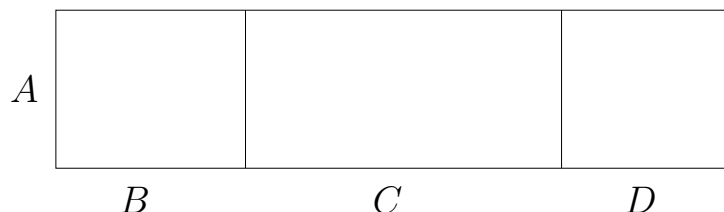


Figura 1: Resultado de tomar dos rectas paralelas, dividir una de ellas en tres partes y formar los rectángulos resultantes.

En resumen, la propiedad establece que

$$A(B + C + D) = AB + AC + AD.$$

### 2. Problemas

**Problema 1.** Demuestre, usando solo los axiomas de cuerpo de los números Reales, y los teoremas de unicidad de los elementos neutros e inversos, que  $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  se cumple que:

$$(ab^{-1})^{-1} = a^{-1}b.$$

*Solución.* Queremos demostrar que  $a^{-1}b$  es el inverso multiplicativo de  $ab^{-1}$ . En efecto,

|                                           |                        |
|-------------------------------------------|------------------------|
| $(ab^{-1})(a^{-1}b) = (ab^{-1})(ba^{-1})$ | Conmutatividad         |
| $= a(b^{-1}(ba^{-1}))$                    | Asociatividad          |
| $= a((b^{-1}b)a^{-1})$                    | Asociatividad          |
| $= a(1 \cdot a^{-1})$                     | Inverso multiplicativo |
| $= aa^{-1}$                               | Neutro multiplicativo  |
| $= 1$                                     | Inverso multiplicativo |

$$\therefore (ab^{-1})(a^{-1}b) = 1$$

Por unicidad del inverso multiplicativo, se tiene  $a^{-1}b = (ab^{-1})^{-1}$ .

□

**Problema 2.** Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \implies (x = 0) \vee (y = 0).$$

*Solución.* Como es una implicancia, asumiremos el lado izquierdo y concluiremos el lado derecho. Es decir, asumiremos

$$xy = 0. \quad (H)$$

Hay dos casos posibles:  $x = 0$  o  $x \neq 0$ . Si  $x = 0$ , estamos listos pues se concluye el lado derecho de la implicancia. Si  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} y &= 1 \cdot y && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (x^{-1}x)y && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= x^{-1}(xy) && \text{Asociatividad} \\ &= x^{-1} \cdot 0 && (H) \\ &= 0 && \forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore y = 0.$$

De lo anterior tenemos que, si  $x \neq 0$ , entonces  $y = 0$  con lo que se termina la demostración. Note que, en el caso  $x \neq 0$ , se pudo usar el inverso multiplicativo de  $x$  gracias a la asunción  $x \neq 0$ .  $\square$

**Problema 3.** Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Demuestre lo siguiente:

$$(1). -a = -1 \cdot a$$

*Solución.*

$$\begin{aligned} a + (-1) \cdot a &= 1 \cdot a + (-1) \cdot a && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= (1 + (-1))a && \text{Distribución} \\ &= 0 \cdot a && \text{Inverso aditivo} \\ &= 0 && \forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a + (-1) \cdot a = 0$$

Por unicidad del inverso aditivo,  $-a = (-1) \cdot a$ .  $\square$

$$(2). (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}, \text{ si } a, b \neq 0.$$

*Solución.*

$$\begin{aligned} (ab)(a^{-1}b^{-1}) &= (ab)(b^{-1}a^{-1}) && \text{Conmutatividad} \\ &= a(b(b^{-1}a^{-1})) && \text{Asociatividad} \\ &= a((bb^{-1})a^{-1}) && \text{Asociatividad} \\ &= a(1 \cdot a^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\ &= aa^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\ &= 1 && \text{Inverso multiplicativo} \end{aligned}$$

$$\therefore (ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1$$

y por unicidad del inverso multiplicativo,  $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ .  $\square$

$$(3). \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \text{ si } b, c \neq 0.$$

*Solución.*

$$\begin{aligned}
 \frac{ac}{bc} &= (ac)(bc)^{-1} && \text{Notación} \\
 &= (ac)(b^{-1}c^{-1}) && \text{P3.2} \\
 &= (ac)(c^{-1}b^{-1}) && \text{Conmutatividad} \\
 &= a(c(c^{-1}b^{-1})) && \text{Asociatividad} \\
 &= a((cc^{-1})b^{-1}) && \text{Asociatividad} \\
 &= a(1 \cdot b^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\
 &= ab^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\
 \frac{a}{b} &&& \text{Notación}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

□

$$(4). \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

*Solución.*

$$\begin{aligned}
 \frac{ad + bc}{bd} &= (ad + bc)(bd)^{-1} && \text{Notación} \\
 &= (ad + bc)(b^{-1}d^{-1}) && \text{P3.2} \\
 &= (ad)(b^{-1}d^{-1}) + (bc)(b^{-1}d^{-1}) && \text{Distributividad} \\
 &= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (bc)(b^{-1}d^{-1}) && \text{Conmutatividad} \\
 &= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (cb)(b^{-1}d^{-1}) && \text{Conmutatividad} \\
 &= a(d(d^{-1}b^{-1})) + c(b(b^{-1}d^{-1})) && \text{Asociatividad} \\
 &= a((dd^{-1})b^{-1}) + c((bb^{-1})d^{-1}) && \text{Asociatividad} \\
 &= a(1 \cdot b^{-1}) + c(1 \cdot d^{-1}) && \text{Inverso multiplicativo} \\
 &= ab^{-1} + cd^{-1} && \text{Neutro multiplicativo} \\
 &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} && \text{Notación}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{ad + bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

□

$$(5). \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{db}, \text{ si } b, d \neq 0.$$

*Solución.*

$$\begin{aligned}
 \frac{ac}{db} &= (ac)(db)^{-1} && \text{Notación} \\
 &= (ac)(d^{-1}b^{-1}) && \text{P3.2} \\
 &= a(c(d^{-1}b^{-1})) && \text{Asociatividad} \\
 &= a((cd^{-1})b^{-1}) && \text{Asociatividad} \\
 &= a(b^{-1}(cd^{-1})) && \text{Conmutatividad} \\
 &= (ab^{-1})(cd^{-1}) && \text{Conmutatividad} \\
 &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} && \text{Notación}
 \end{aligned}$$

□

**Problema 4.** Sea  $C$  un conjunto de número reales que satisface las siguientes propiedades:

- (P1).  $3 \in C$ , (P3). Si  $x, y \in C$ , entonces  $x + y \in C$ ,  
 (P2). Si  $x \in C$ , entonces  $3x + 1 \in C$ , (P4).  $7 \notin C$ .

Demuestre entonces las siguientes propiedades.

1.  $1 \notin C$ ,

*Solución.* Si  $1 \in C$  entonces, por (P2),  $3 \cdot 1 + 1 \in C$ . Además, como, por (P1),  $3 \in C$ , entonces, por (P3),  $4 + 3 \in C$ , es decir,  $7 \in C$ . Esto último contradice (P4) con lo que no se puede tener  $1 \in C$ , es decir,  $1 \notin C$ . □

2. Si  $x, y \in C$ , entonces  $3x + 2y + 4 \in C$ ,

*Solución.* Se tiene que, por conmutatividad de la suma,  $3x + 2y + 4 = 3x + 1 + y + y + 3$ . Como, por (P2),  $3x + 1 \in C$ , por (P1),  $3 \in C$  y por hipótesis  $y \in C$ , entonces, por (P3),  $3x + 1 + y \in C$  y, nuevamente, por (P3),  $3x + 1 + y + y \in C$  con lo que, nuevamente por (P3),  $3x + 1 + y + y + 3 \in C$ . Con esto se tiene que  $3x + 2y + 4 \in C$ . □

3. Si  $x, y \in C$ , entonces  $4 - x - y \notin C$ ,

*Solución.* Asumamos que existe  $x, y \in C$  tal que  $4 - x - y \in C$ . Entonces, por (P3),  $4 - x - y + x \in C$ , pero, por conmutatividad, por inverso aditivo y neutro aditivo,  $4 - x - y + x = 4 - y$ . Nuevamente por (P3), se tiene que  $4 - y + y \in C$ , es decir,  $4 \in C$ , por inverso aditivo y elemento neutro. Por (P1),  $3 \in C$  con lo que, por (P3),  $4 + 3 \in C$ , es decir,  $7 \in C$ . Esto último contradice (P4), es decir, No existe ningún  $x, y \in C$  tal que  $4 - x - y \in C$ . En otras palabras, si  $x, y \in C$ , entonces  $4 - x - y \notin C$ . □

4. Si  $3y + z + 4 \notin C$ , entonces  $(y \notin C \vee z/2 \notin C)$ ,

*Solución.* Sea  $y \in C$  y  $z/2 \in C$ . De (P3) se sigue que  $z/2 + z/2 \in C$ . Como  $z/2 + z/2 = 2(z/2) = 2(Z2^{-1}) = 2(2^{-1}z) = (2 * 2^{-1})z = 1 * z = z$  (donde se utilizó conmutatividad, asociativo, inverso multiplicativo y elemento neutro en las igualdades 3, 4, 5 y 6 respectivamente), entonces  $z \in C$ . Con esto, por (P2),  $3y + 1 \in C$ , además, por (P3),  $3y + 1 + z \in C$ , además, por (P1),  $3 \in C$  con lo que, por (P3) nuevamente,  $3y + 1 + z + 3 \in C$ . Notemos que, por conmutatividad,  $3y + 1 + z + 3 = 3y + z + 4$  con lo que  $3y + z + 4 \in C$ .

Acabamos de demostrar que,  $(y \in C \wedge z/2 \in C) \implies 3y + z + 4 \in C$  o, lo que es lo mismo (contrarecíproco),  $3y + z + 4 \notin C \implies (y \notin C \vee z/2 \notin C)$ . □

5. No existe  $x \in C$  tal que  $3(2x - 1) = 39$ .

*Solución.* Por contradicción, supongamos que  $x \in C$  es tal que  $3(2x - 1) = 39$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 3(2x - 1) = 39 &\iff 6x - 3 = 39 && \text{Conmutatividad} \\
 &\iff (6x - 3) + 3 = 39 + 3 \\
 &\iff 6x(-3 + 3) = 39 + 3 && \text{Asociatividad} \\
 &\iff 6x + 0 = 42 && \text{Inverso aditivo} \\
 &\iff 6x = 42 && \text{Neutro aditivo} \\
 &\iff 6^{-1}(6x) = 6^{-1} \cdot 42 \\
 &\iff (6^{-1} \cdot 6)x = 6^{-1} \cdot (6 \cdot 7) && \text{Asociatividad} \\
 &\iff 1 \cdot x = (6^{-1} \cdot 6)7 && \text{Inverso multiplicativo} \\
 &\iff x = (6^{-1} \cdot 6)7 && \text{Neutro multiplicativo} \\
 &\iff x = 1 \cdot 7 && \text{Inverso multiplicativo} \\
 &\iff x = 7 && \text{Neutro multiplicativo}
 \end{aligned}$$

Con esto,  $7 \in C$  (pues  $x \in C$ ). Esto último contradice (P4) con lo que no existe un  $x \in C$  tal que  $3(2x - 1) = 39$ . □

*Para los siguientes dos problemas, usaremos los números enteros como siempre los hemos conocido de manera intuitiva. Asumiremos las siguientes propiedades:*

- (a).  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ,
- (b).  $0, 1 \in \mathbb{Z}$ ,
- (c).  $n \in \mathbb{Z} \implies -n \in \mathbb{Z}$ .

**Además, para este auxiliar, asumiremos que  $1/2 \notin \mathbb{Z}$ .**

**Problema 5.** Definimos el conjunto de los números racionales como

$$\mathbb{Q} = \{pq^{-1} \in \mathbb{R} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Demuestre que  $\mathbb{Q}$  es un cuerpo, si es que lo es, o demuestre que no es, si no lo es. En este contexto, las operaciones de suma y multiplicación entre elementos racionales  $a, b$ , corresponde a la suma y multiplicación entre los elementos reales  $a, b$  (que en particular, son racionales).

*Solución.* Queremos demostrar que  $\mathbb{Q}$  satisface las propiedades establecidas en la sección 3 al final de este enunciado (esto es, las cinco propiedades siguen siendo verdaderas si remplazamos  $\mathbb{R}$  por  $\mathbb{Q}$  en cada una de ellas).

Para la conmutatividad para la suma, tomamos  $x, y \in \mathbb{Q}$ , en particular,  $x, y \in \mathbb{R}$  y por ende  $x + y = y + x$  (pues esto es verdad para todos los reales  $x, y$ ).

La conmutatividad multiplicativa, la asociatividad y la distributividad se demuestran de manera análoga.

Tenemos que  $0 = 0/1 \in \mathbb{Q}$  y, además, si  $x \in \mathbb{Q}$  entonces  $x + 0 = x$  pues  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $a + 0 = a$  y  $x \in \mathbb{R}$ . La demostración para el neutro multiplicativo es análoga.

Mostremos la propiedad del inverso aditivo: Sea  $pq^{-1} \in \mathbb{Q}$  con  $p \in \mathbb{Z}$  y  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Sabemos que existe un único  $-(pq^{-1}) \in \mathbb{R}$  tal que  $pq^{-1} + (-(pq^{-1})) = 0$ . Pero

$$\begin{aligned} -(pq^{-1}) &= (-1)(pq^{-1}) && \text{P3.1} \\ &= ((-1)p)q^{-1} && \text{Asociatividad} \\ &= (-p)q^{-1} && \text{P3.1} \end{aligned}$$

$$\therefore -(pq^{-1}) = (-p)q^{-1} \in \mathbb{Q}.$$

Con lo que  $\mathbb{Q}$  tiene la propiedad de inverso aditivo.

Para el inverso multiplicativo, sea  $pq^{-1} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  con  $p \in \mathbb{Z}$  y  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Notemos que, como  $pq^{-1} \neq 0$ , entonces necesariamente,  $q \neq 0$ . Como, en particular,  $pq^{-1} \in \mathbb{R}$ , existe un elemento  $(pq^{-1})^{-1} \in \mathbb{R}$  tal que  $(pq^{-1})(pq^{-1})^{-1} = 1$ . Mostremos que  $(pq^{-1})^{-1} \in \mathbb{Q}$ :

$$\begin{aligned} (pq^{-1})^{-1} &= p^{-1}(q^{-1})^{-1} && \text{P3.2} \\ &= (q^{-1})^{-1}p^{-1} && \text{Conmutatividad} \\ &= qp^{-1} && \forall x \in \mathbb{R} (x^{-1})^{-1} = x \end{aligned}$$

$$\therefore (pq^{-1})^{-1} = qp^{-1} \in \mathbb{Q}$$

con lo que  $\mathbb{Q}$  tiene la propiedad de inverso multiplicativo y  $\mathbb{Q}$  es un cuerpo. □

**Problema 6.** Consideremos  $\mathbb{Z}$  el conjunto de los números enteros. En este contexto, las operaciones de suma y multiplicación entre elementos enteros  $n, m$ , corresponde a la suma y multiplicación entre estos elementos reales  $n, m$  (que en particular, son enteros).

- (1). Demuestre que  $\mathbb{Z}$  cumple con los axiomas de cuerpo excepto, quizás, el axioma de inverso multiplicativo.

*Solución.* Las propiedades 1 a la 4 son análogas a la demostración para  $\mathbb{Q}$ . La demostración de el axioma 5(1) es directa de nuestra hipótesis que  $n \in \mathbb{Z} \implies -n \in \mathbb{Z}$ . □

- (2). Demuestre que  $\mathbb{Z}$  es un cuerpo, si es que lo es, o demuestre que no lo es, si es que no lo es.

*Solución.* Debido a la parte anterior, la única forma en la que  $\mathbb{Z}$  podría no ser cuerpo, es si el axioma 5(2) no se cumple. Es decir, si es que existe un entero sin inverso en los enteros. Consideremos  $2 \in \mathbb{N}$ , entonces,  $1/2$  es el único elemento en  $\mathbb{R}$  tal que  $2 \cdot 1/2 = 1$ . Pero  $1/2 \notin \mathbb{Z}$  por lo que  $\mathbb{Z}$  no es cuerpo. □

### 3. Resumen.

**Axioma 1 (Conmutatividad).**

- (1).  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x.$
- (2).  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x.$

**Axioma 2 (Asociatividad)**

- (1).  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) + z = x + (y + z).$
- (2).  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$

**Axioma 3 (Distributividad).**

- (1)  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x(y + z) = xy + xz.$
- (2)  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y)z = xz + yz.$

**Axioma 4 (Elemento neutro).**

- (1).  $\exists e_+ \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + e_+ = e_+ + x = x.$
- (2).  $\exists e. \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \cdot e. = e. \cdot x = x.$

**Axioma 5 (Elemento inverso).**

- (1).  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists(-x) \in \mathbb{R}, x + (-x) = (-x) + x = e_+.$
- (2).  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists(x^{-1}) \in \mathbb{R}, x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = e..$