MA1001-6 Introducción al Cálculo-2025.
Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
14 de marzo de 2025

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 1

Axiomas de Cuerpo de los Números Reales

1. Introducción

Consideremos la proposición 1 del libro II de los Elementos de Euclides:
Proposición 1 (Euclides). *Si de dos rectas la una se divide en cualquier número de partes iguales; el rectángulo compuesto por las dos será igual a los rectángulos contenidos por la entera, y por los segmentos de la otra.*

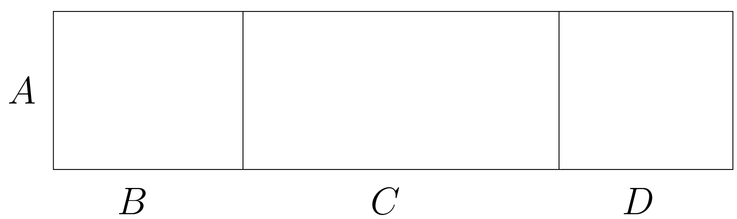

Figura 1: Resultado de tomar dos rectas paralelas, dividir una de ellas en tres partes y formar los rectángulos resultantes.

En otras palabras, $A(B+C+D) = AB + AC + AD$.

2. Problemas

Problema 1. *Demuestre, usando solo los axiomas de cuerpo de los números Reales, y los teoremas de unicidad de los elementos neutros e inversos, que* $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *se cumple que:*

$$(ab^{-1})^{-1} = a^{-1}b.$$

Problema 2. *Demuestre que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \implies (x = 0) \vee (y = 0).$$

Problema 3. *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Demuestre lo siguiente:*

(1). $-a = -1 \cdot a$

(2). $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, *si* $a, b \neq 0$.

(3). $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, *si* $b, c \neq 0$.

(4). $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$.

(5). $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{db}$, *si* $b, d \neq 0$.

Problema 4. *Sea* C *un conjunto de número reales que satisface las siguientes propiedades:*

(P1). $3 \in C$,

(P2). Si $x \in C$, *entonces* $3x + 1 \in C$,

(P3). Si $x, y \in C$, *entonces* $x + y \in C$,

(P4). $7 \notin C$.

Demuestre entonces las siguientes propiedades indicando los axiomas o propiedades utilizadas.

1. $1 \notin C$,
2. *Si* $x, y \in C$, *entonces* $3x + 2y + 4 \in C$,
3. *Si* $x, y \in C$, *entonces* $4 - x - y \notin C$,
4. *Si* $3y + z + 4 \notin C$, *entonces* $(y \notin C \vee z/2 \notin C)$,
5. *No existe* $x \in C$ *tal que* $3(2x - 1) = 39$.

Problema 5. *Definimos el conjunto de los números racionales como*

$$\mathbb{Q} = \{pq^{-1} \in \mathbb{R} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Demuestre que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo, si es que lo es, o demuestre que no es, si no lo es. En este contexto, las operaciones de suma y multiplicación entre elementos racionales a, b, corresponde a la suma y multiplicación entre los elementos reales a, b (que en particular, son racionales).

Problema 6. *Consideremos $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. En este contexto, las operaciones de suma y multiplicación entre elementos enteros n, m, corresponde a la suma y multiplicación entre estos elementos reales n, m (que en particular, son enteros).*

(1). *Demuestre que $\mathbb{Z}$ cumple con los axiomas de cuerpo excepto, quizás, el axioma de inverso multiplicativo.*

(2). *Demuestre que $\mathbb{Z}$ es un cuerpo, si es que lo es, o demuestre que no lo es, si es que no lo es.*

3. Resumen.

Axioma 1 (Conmutatividad).

(1). $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x.$

(2). $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = y \cdot x.$

Axioma 2 (Asociatividad)

(1). $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x + y) + z = x + (y + z).$

(2). $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$

Axioma 3 (Distributividad).

(1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x(y + z) = xy + xz.$

(2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x + y)z = xz + yz.$

Axioma 4 (Elemento neutro).

(1). $\exists e_+ \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ x + e_+ = e_+ + x = x.$

(2). $\exists e_{\cdot} \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot e_{\cdot} = e_{\cdot} \cdot x = x.$

Axioma 5 (Elemento inverso).

(1). $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (-x) \in \mathbb{R},\ x + (-x) = (-x) + x = e_+.$

(2). $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists (x^{-1}) \in \mathbb{R},\ x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = e_{\cdot}.$