Departamento de Ingeniería Matemática
Profesor: Javier Ramírez
Auxiliar: Hernán Torres V, Sivert Escaff G y Pascal Steiner M.
Fecha: 27 de marzo de 2025

Pauta Clase Auxiliar N°2
Axiomas de Orden e Inecuaciones

P1.- *Control 1 - 2024*. Usando los axiomas y propiedades de cuerpo y orden de $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\text{Para todo } x > 0 \text{ tal que } (x+4)(x^{-1}+1) \geq 9$$

Resolución: Primero, notemos que, para todo $x > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(x+4)(x^{-1}+1) &= x \cdot x^{-1} + x \cdot 1 + 4 \cdot x^{-1} + 4 \cdot 1 && \text{Distributividad o Productos Notables}\\
&= 1 + x + 4x^{-1} + 4 && \text{Axioma del Elemento Neutro Multiplicativo}\\
&= 5 + x + 4x^{-1} && \text{Suma } 1+4=5\\
&= 5 + (x^2+4)x^{-1} && \text{Distributividad o Factorización}\\
&= 5 + (x^2+4-4x+4x)x^{-1} && \text{Nikita - Nipone con } -4x+4x\\
&= 5 + 4 \cdot x \cdot x^{-1} + (x^2-4x+4)x^{-1} && \text{Distributividad}\\
&= 5 + 4 \cdot 1 + (x^2-4x+4)x^{-1} && \text{Axioma del Elemento Inverso Multiplicativo}\\
&= 5 + 4 + (x^2-4x+4)x^{-1} && \text{Axioma del Elemento Neutro Multiplicativo}\\
&= 9 + (x-2)^2 x^{-1} && \text{Cuadrado de Binomio}\\
&\geq 9 && \text{Pues } (x-2)^2 \geq 0 \text{ y } x^{-1} > 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto[a]

$$\text{Para todo } x > 0 \text{ tal que } (x+4)(x^{-1}+1) \geq 9$$

Se concluye. ■

[a] Otra manera de demostrar lo pedido es notando que

$$\begin{aligned}
(x+4)(x^{-1}+1) &= 5 + x + 4x^{-1}\\
&= 5 + (x^2+4)x^{-1}\\
&\geq 5 + (2 \cdot 2 \cdot x)x^{-1} && \text{Pues } a^2+b^2 \geq 2ab \text{ con } (a=2, b=2) \text{ y } x^{-1} > 0\\
&\geq 9 && \text{Pues } (x-2)^2 \geq 0 \text{ y } x^{-1} > 0
\end{aligned}$$

P2.- *Control 1 Recuperativo - 2024.* Usando los axiomas y propiedades de cuerpo y orden de $\mathbb{R}$. Demuestre que para cada $x, y > 0$ se cumple

$$\frac{x^4}{y} + y^3 \geq 2x^2 y$$

Resolución: Sean $x > 0$ e $y > 0$ arbitrarios. Notemos que, tenemos la siguiente desigualdad

$$2ab \leq a^2 + b^2 \tag{1}$$

....

Demostremos la Desigualdad (1). En efecto, sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^2 \geq 0$. Luego, considerando $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a - b \in \mathbb{R}$, luego, tenemos que $(a-b)^2 \geq 0$. Entonces, desarrollando esto último obtenemos que

$$(a-b)^2 \geq 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Así, obtenemos la Desigualdad (1).

....

Así, usando la Desigualdad (1) con $a = \dfrac{x^2}{y}$ y $b = y$ obtenemos que

$$\begin{aligned} 2ab \leq a^2 + b^2 &\iff 2 \cdot \frac{x^2}{y} \cdot y \leq \left[\frac{x^2}{y}\right]^2 + y^2 \\ &\iff 2 \cdot x^2 \leq \frac{x^4}{y^2} + y^2 && \text{Simplificamos el } y > 0 \\ &\iff 2x^2 \leq \frac{x^4}{y^2} + y^2 \end{aligned}$$

$$2x^2 \leq \frac{x^4}{y^2} + y^2 \tag{2}$$

Luego, como $y > 0$ podemos multiplicar la Desigualdad (2) por y, así, obtenemos lo deseado, pues como $y > 0$ la desigualdad no cambia de sentido,

$$2x^2 y \leq \frac{x^4}{y} + x^4 y + y^3$$

Se concluye. ■

P3.- *Examen Primavera - 2024.*

1. Demuestre, **usando la definición del valor absoluto** que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Resolución: A partir de la definición del valor absoluto, se sabe que, para todo $x \in \mathbb{R}$, si $x > 0$, entonces $|x| = x$, mientras que, si $x < 0$ entonces $|x| = -x$, es decir

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo que podemos concluir que, siempre se tiene

$$-|x| \leq x \leq |x|. \tag{1}$$

Si tomamos $y \in \mathbb{R}$, entonces, de la misma forma podemos escribir para y la desigualdad

$$-|y| \leq y \leq |y|. \tag{2}$$

Sumando las desigualdades (1) y (2), obtenemos que,

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|, \tag{3}$$

Ahora, recordemos la siguiente propiedad del valor absoluto

$$-|b| \leq a \leq |b| \iff |a| \leq b$$

Con esta propiedad, notemos que si usamos $b = |x| + |y|$ y $a = x + y$, tenemos que

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \iff |x+y| \leq |x| + |y|$$

Es decir, tenemos que

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{4}$$

$\blacksquare$

2. Use lo anterior para concluir que, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|a-b| \leq |a-c| + |b-c|$$

Resolución: Para esta parte, tomándolo en cuenta el lado derecho de la desigualdad que queremos probar, tomemos $x = a - c$ e $y = c - b$, por lo que

$$x + y = a - c + c - b = a - b,$$

Reemplazando esto en la desigualdad (4) obtenida previamente, podemos escribir

$$|a-b| \leq |a-c| + |b-c|$$

Se concluye. $\blacksquare$

P4.- Resuelva la siguiente inecuación

$$\frac{x}{x+2} \leq \frac{2}{x+5}$$

Resolución: Para resolver la inecuación, trabajemos su expresión, notemos que

$$\frac{x}{x+2} \leq \frac{2}{x+5} \iff \frac{x}{x+2} - \frac{2}{x+5} \leq 0 \iff \frac{\overbrace{x(x+5)-2(x+2)}^{P(x)}}{\underbrace{(x+5)(x+2)}_{Q(x)}} \leq 0$$

Notemos que $P(x)$ se puede factorizar de una mejor manera

$$P(x) = x(x+5) - 2(x+2) = x^2 + 5x - 2x - 4 = x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$$

Ahora nuestra inecuación es

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+5)(x+2)}$$

Ahora identificamos los puntos críticos de $P(x)$ y $Q(x)$

$$\text{Puntos Críticos de } P(x) : x = -4 \text{ y } x = 1$$
$$\text{Puntos Críticos de } Q(x) : x = -5 \text{ y } x = -2$$

Ahora realizamos la siguiente tabla que identifica el signo final de la inecuación

	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-4)$	-4	$(-4,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,\infty)$
$(x+4)$	-		-		$+$		$+$		$+$
$(x-1)$	-		-		-		-		$+$
$(x+2)$	-		-		-		$+$		$+$
$(x+5)$	-		$+$		$+$		$+$		$+$
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	>0	$\nexists$	<0	$=0$	>0	$\nexists$	<0	$=0$	>0

Entonces se tiene que $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$ para todo $x \in (-5,-4) \cup (-2,1)$. Sin embargo notemos que nuestra expresión de interés contiene el signo $\leq$, entonces se agregan los puntos críticos de $P(x)$ que no sean puntos críticos de $Q(x)$, luego $x = -4$ y $x = 1$ son parte de la solución, por tanto

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \iff x \in (-5,-4] \cup (-2,1]$$

Por tanto, podemos escribir el conjunto solución como sigue

$$\mathcal{CS} = \{x \in \mathbb{R} : x \in (-5,-4] \cup (-2,1]\}$$

Se concluye. ■

Ejercicios Propuestos

P1.- Resuelva la siguiente inecuación

$$\frac{(x-4)}{(x-5)} \geq \frac{(x-5)}{(x-8)}$$

Resolución: Para resolver la inecuación, trabajemos su expresión, notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{(x-4)}{(x-5)} \geq \frac{(x-5)}{(x-8)} &\Longleftrightarrow \frac{(x-4)}{(x-5)} - \frac{(x-5)}{(x-8)} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{(x-4)(x-8)-(x-5)^2}{(x-5)(x-8)} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{x^2-12x+32-(x^2-10x+25)}{(x-5)(x-8)} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{x^2-12x+32-x^2+10x-25}{(x-5)(x-8)} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{-2x+7}{(x-5)(x-8)} \geq 0
\end{aligned}$$

Ahora nuestra inecuación es

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-2x+7}{(x-5)(x-8)}$$

Ahora identificamos los puntos críticos de $P(x)$ y $Q(x)$

$$\text{Puntos Críticos de } P(x) : x = \frac{7}{2}$$
$$\text{Puntos Críticos de } Q(x) : x = 5 \text{ y } x = 8$$

Ahora realizamos la siguiente tabla que identifica el signo final de la inecuación

	$(-\infty, 7/2)$	$\frac{7}{2}$	$(7/2, 5)$	5	$(5, 8)$	8	$(8, +\infty)$
$-2x+7$	$+$		-		-		-
$(x-5)$	-		-		$+$		$+$
$(x-8)$	-		-		-		$+$
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	>0	$=0$	<0	$\nexists$	>0	$\nexists$	<0

Entonces se tiene que $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$ para todo $x \in (-\infty, 7/2) \cup (5, 8)$. Sin embargo notemos que nuestra expresión de interés contiene el signo $\geq$, entonces se agregan los puntos críticos de $P(x)$ que no sean puntos críticos de $Q(x)$, luego $x = \frac{7}{2}$ es parte de la solución, por tanto

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 7/2] \cup (5, 8)$$

Por tanto, podemos escribir el conjunto solución como sigue

$$\mathcal{CS} = \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, 7/2] \cup (5, 8)\}$$

Se concluye. ■