

Departamento de Ingeniería Matemática

Profesor: Javier Ramírez

Auxiliar: Hernán Torres V, Sivert Escaff G y Pascal Steiner M.

Fecha: 27 de marzo de 2025



Enunciado Clase Auxiliar N°2

Axiomas de Orden e Inecuaciones

P1.- Control 1 - 2024. Usando los axiomas y propiedades de cuerpo y orden de $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\text{Para todo } x > 0 \text{ tal que } (x+4)(x^{-1}+1) \geq 9$$

P2.- Control 1 Recuperativo - 2024. Usando los axiomas y propiedades de cuerpo y orden de $\mathbb{R}$. Demuestre que para cada $x, y > 0$ se cumple

$$\frac{x^4}{y} + y^3 \geq 2x^2y$$

P3.- Examen Primavera - 2024.

1. Demuestre, **usando la definición del valor absoluto** que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

2. Use lo anterior para concluir que, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|a-b| \leq |a-c| + |b-c|$$

P4.- Resuelva la siguiente inecuación

$$\frac{x}{x+2} \leq \frac{2}{x+5}$$

.....

Ejercicios Propuestos

P1.- Resuelva la siguiente inecuación

$$\frac{(x-4)}{(x-5)} \geq \frac{(x-5)}{(x-8)}$$

Resumen

Definición 1 (Cono Positivo). Sea $\mathbb{R}$ el Conjunto de los Números Reales, definimos el conjunto de los números reales estrictamente positivos como el subconjunto $\mathbb{R}_+^* \subseteq \mathbb{R}$. Al conjunto $\mathbb{R}_+^*$ se le llama **Cono Positivo** del orden de $\mathbb{R}$.

Axioma 1 (Axiomas de Orden). Los números reales cumplen los siguientes axiomas:

- **Axioma de la Tricotomía:** Este axioma lo que dice es que hay tres posibilidades para un número, las cuales son mutuamente excluyentes. Para todo $x \in \mathbb{R}$ una y sólo una de las tres siguientes proposiciones es **verdadera**:

- $x \in \mathbb{R}_+^*$
- $-x \in \mathbb{R}_+^*$
- $x = 0$

- **Axioma de la Clausura en $\mathbb{R}_+^*$:** Este axioma lo que dice es que al sumar u operar dos elementos de $\mathbb{R}_+^*$, el resultado seguirá estando en $\mathbb{R}_+^*$. Es decir:

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}_+^* : (x + y) \in \mathbb{R}_+^*$
(Suma de dos números positivos es un número positivo)
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}_+^* : (x \cdot y) \in \mathbb{R}_+^*$
(Producto de dos números positivos es un número positivo)

Notación 1. Considerando el cuerpo ordenado de los reales, se tiene que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se definen:

- $x < y : \iff (y - x) \in \mathbb{R}_+^*$
- $x > y : \iff (y < x) \iff (x - y) \in \mathbb{R}_+^*$
- $x \leq y : \iff (x < y) \vee (x = y)$
- $x \geq y : \iff y \leq x \iff (y < x) \vee (y = x)$

Proposición 1 (Tricotomía). Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ una y sólo una de las tres proposiciones es **verdadera**:

$$x < y \vee x > y \vee x = y$$

Proposición 2 (Transitividad). Para todo $x, y, z \in \mathbb{R} : (x < y) \wedge (y < z) \implies (x < z)$.

Proposición 3. Se tienen las siguientes propiedades:

1. $(x < 0) \wedge (y > 0) \implies x \cdot y < 0$
2. $(x < 0) \wedge (y < 0) \implies x \cdot y > 0$

Proposición 4. Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $x^2 \geq 0$. En particular $1 > 0$.

Proposición 5 (Propiedades de Desigualdades). Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tienen las siguientes afirmaciones:

- a) $a < b \implies -b < -a$.

$$b) \ x < y \wedge a \in \mathbb{R} \implies x + a < y + a.$$

$$c) \ x < y \wedge a > 0 \implies a \cdot x < a \cdot y.$$

$$d) \ x < y \wedge a < 0 \implies a \cdot x > a \cdot y.$$

$$e) \ \text{Si } x < y \wedge u < v \implies x + u < y + v.$$

$$f) \ \text{Si } 0 < x < y \wedge 0 < u < v \text{ entonces podemos multiplicar las desigualdades, es decir, existe } x \cdot u < y \cdot v.$$

Definición 2 (Valor Absoluto). Sea $x \in \mathbb{R}$, llamamos **módulo** de x o **valor absoluto** de x , al número real definido por

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposición 6 (Propiedades del Valor Absoluto). Dada la definición de valor absoluto se tiene

1. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $|x| \geq 0$
2. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $|x| = 0 \iff x = 0$.
3. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
4. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $|x| = |-x|$.
5. Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq 0$, entonces $\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$.
6. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$.
7. Sea $x \in \mathbb{R} : |x^2| = |x|^2 = x^2$.
8. *Generalización de la Propiedad Anterior:* Se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}, |x^n| = |x|^n$.
9. Sean $x \in \mathbb{R}$, entonces $-|x| \leq x \leq |x|$.
10. Sea $x, y \in \mathbb{R}$, entonces, $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$.
11. *Desigualdad Triangular:* Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces se cumple

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$
12. *Generalización de la Desigualdad Triangular:* Sea $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$
13. *Desigualdad Triangular Inversa:* Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces se cumple

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$