Departamento de Ingeniería Matemática
Profesor: Javier Ramírez
Auxiliar: Hernán Torres V, Sivert Escaff G y Pascal Steiner M.
Fecha: 20 de marzo de 2025

Pauta Auxiliar N°1
Axiomas de Cuerpo

P1.- *Control 1 - 2024.* Usando los axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos y la Tabla del Cero. Demuestre que

$$1 + (-1)^{-1} = 0$$

<u>Resolución:</u> Debemos demostrar que

$$1 + (-1)^{-1} = 0$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}
1 + (-1)^{-1} &= (-1)\cdot(-1)^{-1} + (-1)^{-1} && \text{Axioma Elemento Inverso (Producto)}\\
&= (-1)\cdot(-1)^{-1} + (-1)^{-1}\cdot 1 && \text{Axioma Elemento Neutro (Producto)}\\
&= (-1)^{-1}\cdot(-1) + (-1)^{-1}\cdot 1 && \text{Axioma Conmutatividad}\\
&= (-1)^{-1}\cdot[(-1) + 1] && \text{Axioma Distributividad}\\
&= (-1)^{-1}\cdot[1 + (-1)] && \text{Axioma Conmutatividad}\\
&= (-1)^{-1}\cdot 0 && \text{Axioma Elemento Inverso (Suma)}\\
&= 0 && \text{Tabla del Cero}
\end{aligned}$$

Así, se concluye que

$$1 + (-1)^{-1} = 0$$

$\blacksquare$

P2.- *Control 1 - 2023.* Usando los axiomas de cuerpo de los números reales, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos, y la propiedad $a \cdot 0 = 0$. Demuestre que

$$\text{Para todo } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ se cumple } \left(-(a^{-1}) + 1\right) \cdot a = a + (-1)$$

Resolución: Notemos que

$$\begin{aligned}
(-(a^{-1}) + 1) \cdot a &= (-(a^{-1})) \cdot a + 1 \cdot a && \text{Distributividad} \\
&= -(a^{-1} \cdot a) + 1 \cdot a && \text{Propiedad Adicional} \\
&= -(a \cdot a^{-1}) + a \cdot 1 && \text{Conmutatividad} \\
&= -1 + a && \text{Elemento Neutro e Inverso} \\
&= a + (-1)
\end{aligned}$$

Se concluye

$$(-(a^{-1}) + 1) = a + (-1)$$

Ahora, demostramos la Propiedad Adicional, la cual fue $(-a)b = -(ab)$. A demostrar que $ab + (-a)b = 0$. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}
ab + (-a)b &= [a + (-a)] \cdot b && \text{Distributividad} \\
&= 0 \cdot b && \text{Elemento Inverso} \\
&= b \cdot 0 && \text{Conmutatividad} \\
&= 0 && \text{Propiedad Enunciado}
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $ab + (-a)b = 0$. Luego, por el Axioma del Elemento Inverso y su unicidad, se tiene que $(-a)b = -(ab)$. Se concluye. ■

P3.- *Control 1 - Primavera 2024.* Sea C un conjunto de números reales que satisface las siguientes propiedades (axiomas):

A1. $2 \in C$.

A2. Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.

A3. Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.

A4. $3 \notin C$.

Demuestre que se cumplen las siguientes propiedades, indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados utiliza:

1. $9 \in C$.

Resolución: Primero, notar que por el Axioma **(A1)** tenemos que $2 \in C$, luego, considerando $x = 2$ y aplicando el Axioma **(A2)**, se obtiene que

$$3 \cdot 2 + 1 = 7 \in C$$

Finalmente, si consideramos $x = 7$ e $y = 2$, y aplicamos el Axioma **(A3)**, tenemos que

$$7 + 2 = 9 \in C$$

■

2. $1 \notin C$.

Resolución: Razonando hacia contradicción. Supongamos que $1 \in C$, entonces, por el Axioma **(A1)** tenemos que $2 \in C$, así, tomando $x = 2$ e $y = 1$ (hipótesis de contradicción), por el Axioma **(A3)** tenemos que

$$2 + 1 = 3 \in C$$

Lo cual contradice el Axioma **(A4)**. Por tanto, $1 \notin C$. ■

3. Si $x, y \in C$, entonces $3x + 1 + 3y \in C$.

Resolución: Notemos que por el Axioma **(A2)** tenemos que si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$. Por otro lado, por el Axioma **(A3)** tenemos que si $y \in C$, entonces

$$y + y = 2y \in C$$

Nuevamente, por el Axioma **(A3)** aplicado a $y \in C$ y $2y \in C$, tenemos que

$$2y + y = 3y \in C$$

Finalmente, por el Axioma **(A3)** tenemos que como $3x + 1 \in C$ y $3y \in C$, entonces

$$3x + 1 + 3y \in C$$

■

4. Si $x \in C$, entonces $-x \notin C$.

Resolución: Razonando hacia contradicción. Supongamos que $x \in C$ y que $-x \in C$, entonces, por el Axioma **(A3)** se tiene que $x + (-x) = 0$, es decir $0 \in C$. Ahora, considerando $x = 0$ y aplicando el Axioma **(A2)** tenemos que

$$3 \cdot 0 + 1 \in C$$

Es decir, $1 \in C$. Por último, por el Inciso (2), tenemos que $1 \notin C$, lo cual genera una contradicción con el Axioma **(A4).** ■

P4.- *Control 1 Recuperativo - 2024.* Usando los axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos y la Tabla del Cero. Demuestre que para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x^{-1} + yz^{-1} = (z + xy)(xz)^{-1}$$

Resolución: Primero, notemos que para cada $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$$

En efecto, pues basta notar que

$$\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) &= x \cdot (y \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1})) && \text{Axioma Asociatividad} \\
&= x \cdot ((y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1}) && \text{Axioma Asociatividad} \\
&= x \cdot ((1) \cdot x^{-1}) && \text{Axioma del Elemento Inverso (Multiplicación)} \\
&= x \cdot x^{-1} && \text{Axioma del Elemento Neutro (Multiplicación)} \\
&= 1 && \text{Axioma del Elemento Inverso (Multiplicación)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = 1$$

Luego, por *Teorema de Unicidad del Elemento Inverso* tenemos que

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$$

Ahora, notemos que mediante cálculo directo tenemos

$$\begin{aligned}
(z + x \cdot y)(x \cdot z)^{-1} &= (z + x \cdot y)(z^{-1} \cdot x^{-1}) && \text{Propiedad Anterior} \\
&= ((z + x \cdot y) \cdot z^{-1}) \cdot x^{-1} && \text{Axioma Asociatividad} \\
&= (z \cdot z^{-1} + (x \cdot y) \cdot z^{-1}) \cdot x^{-1} && \text{Axioma Distributividad} \\
&= (1 + (x \cdot y) \cdot z^{-1}) \cdot x^{-1} && \text{Axioma Elemento Inverso (Multiplicación)} \\
&= (1 + x \cdot (y \cdot z^{-1})) \cdot x^{-1} && \text{Axioma Asociatividad} \\
&= (1 + (y \cdot z^{-1}) \cdot x) \cdot x^{-1} && \text{Axioma Conmutatividad} \\
&= (1 \cdot x^{-1} + (y \cdot z^{-1}) \cdot x) \cdot x^{-1} && \text{Axioma Distributividad} \\
&= x^{-1} + ((y \cdot z^{-1}) \cdot x) \cdot x^{-1} && \text{Axioma Elemento Neutro (Multiplicación)} \\
&= x^{-1} + (y \cdot z^{-1}) \cdot (x \cdot x^{-1}) && \text{Axioma Asociatividad} \\
&= x^{-1} + (y \cdot z^{-1}) \cdot (1) && \text{Axioma Elemento Inverso (Multiplicación)} \\
&= x^{-1} + (y \cdot z^{-1})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que

$$(z + x \cdot y)(x \cdot z)^{-1} = x^{-1} + (y \cdot z^{-1})$$

■

Ejercicios Propuestos:

P1.- *Control 1 - 2007.* Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de los neutros e inversos aditivo y multiplicativo, demuestre las siguientes propiedades, considere $\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

1. Para todo $a \in \mathbb{R}^*, (a^2)^{-1} = (a^{-1})^2$. Es decir, el recíproco de a^2 es $(a^{-1})^2$.

Resolución: Se debe probar que el recíproco de a^2 es $(a^{-1})^2$, es decir, que se debe demostrar

$$a^2 \cdot (a^{-1})^2 = 1$$

En efecto, notamos

$$\begin{aligned}
a^2 \cdot (a^{-1})^2 &= (a \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot a^{-1}) && \text{Definición de } x^2 = x \cdot x \\
&= a \cdot (a \cdot (a^{-1} \cdot a^{-1})) && \text{Axioma de Asociatividad} \\
&= a \cdot ((a \cdot a^{-1}) \cdot a^{-1}) && \text{Axioma de Asociatividad} \\
&= a \cdot (1 \cdot a^{-1}) && \text{Axioma del Inverso Multiplicativo} \\
&= a \cdot a^{-1} && \text{Axioma del Elemento Neutro Multiplicativo} \\
&= 1 && \text{Axioma del Inverso Multiplicativo}
\end{aligned}$$

Lo anterior permite concluir lo pedido. ■

2. Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todo $b \in \mathbb{R}^*$ se tiene $(-a)b^{-1} = -(ab^{-1})$.

Resolución: Se debe probar que el opuesto de ab^{-1} es $(-a)b^{-1}$, es decir, se debe demostrar

$$ab^{-1} + (-a)b^{-1} = 0$$

En efecto, notamos

$$\begin{aligned}
ab^{-1} + (-a)b^{-1} &= (a + (-a)) \cdot b^{-1} && \text{Axioma de Distributividad} \\
&= 0 \cdot b^{-1} && \text{Axioma del Elemento Inverso} \\
&= 0 && \text{Tabla del Cero}
\end{aligned}$$

Se concluye. ■

3. Para todo $a, c \in \mathbb{R}$ y para todo $b, d \in \mathbb{R}^*$, se tiene que

$$a(b+d) = b(a+c) \Longrightarrow ab^{-1} = cd^{-1}$$

Resolución: Desarrollamos la expresión $a(b+d) = b(a+c)$, donde notamos

$$\begin{aligned}
a(b+d) = b(a+c) &\Longrightarrow ab + ad = ba + bc && \text{Ax. Distributividad} \\
&\Longrightarrow ab + ad = ab + bc && \text{Ax. Conmutatividad} \\
&\Longrightarrow (-(ab)) + (ab + ad) = (-(ab)) + (ab + bc) && \text{Sumar } -(ab) \\
&\Longrightarrow ((-(ab)) + ab) + ad = ((-(ab)) + ab) + bc && \text{Ax. Asocitaividad} \\
&\Longrightarrow 0 + ad = 0 + bc && \text{Ax. Elemento Inverso} \\
&\Longrightarrow ad = bc && \text{Ax. Neutro Aditivo}
\end{aligned}$$

Ahora trabajamos con la expresión $ad = bc$

$$\begin{aligned}
ad = bc &\Longrightarrow (ad)(b^{-1}d^{-1}) = (bc)(b^{-1}d^{-1}) && \text{Multiplicar } (b^{-1}d^{-1}) \\
&\Longrightarrow (ad)(d^{-1}b^{-1}) = (cb)(b^{-1}d^{-1}) && \text{Ax. Conmutatividad} \\
&\Longrightarrow ((ad)d^{-1})b^{-1} = ((cb)b^{-1})d^{-1} && \text{Ax. Asociatividad} \\
&\Longrightarrow (a(dd^{-1}))b^{-1} = (c(bb^{-1}))d^{-1} && \text{Ax. Asociatividad} \\
&\Longrightarrow (a \cdot 1)b^{-1} = (c \cdot 1)d^{-1} && \text{Ax. Elemento Inverso} \\
&\Longrightarrow a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} && \text{Ax. Elemento Neutro}
\end{aligned}$$

Lo que permite concluir $a(b+d) = b(a+c) \Longrightarrow ab^{-1} = cd^{-1}$. ■