Departamento de Ingeniería Matemática
Profesor: Javier Ramírez
Auxiliar: Hernán Torres V, Sivert Escaff G y Pascal Steiner M.
Fecha: 20 de marzo de 2025

Enunciado Clase Auxiliar N°1
Axiomas de Cuerpo

P1.- *Control 1 - 2024.* Usando los axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos y la Tabla del Cero. Demuestre que

$$1 + (-1)^{-1} = 0$$

P2.- *Control 1 - 2023.* Usando los axiomas de cuerpo de los números reales, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos, y la propiedad $a \cdot 0 = 0$. Demuestre que

$$\text{Para todo } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ se cumple } \big(-(a^{-1}) + 1\big) \cdot a = a + (-1)$$

P3.- *Control 1 - Primavera 2024.* Sea C un conjunto de números reales que satisface las siguientes propiedades (axiomas):

A1. $2 \in C$.

A2. Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.

A3. Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.

A4. $3 \notin C$.

Demuestre que se cumplen las siguientes propiedades, indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados utiliza:

1. $9 \in C$.
2. $1 \notin C$.
3. Si $x, y \in C$, entonces $3x + 1 + 3y \in C$.
4. Si $x \in C$, entonces $-x \notin C$.

P4.- *Control 1 Recuperativo - 2024.* Usando los axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos y la Tabla del Cero. Demuestre que para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x^{-1} + yz^{-1} = (z + xy)(xz)^{-1}$$

....

Ejercicios Propuestos

P1.- *Control 1 - 2007.* Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de los neutros e inversos aditivo y multiplicativo, demuestre las siguientes propiedades, considere $\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

1. Para todo $a \in \mathbb{R}^*$, $(a^2)^{-1} = (a^{-1})^2$. Es decir, el recíproco de a^2 es $(a^{-1})^2$.
2. Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todo $b \in \mathbb{R}^*$ se tiene $(-a)b^{-1} = -(ab^{-1})$.
3. Para todo $a, c \in \mathbb{R}$ y para todo $b, d \in \mathbb{R}^*$, se tiene que

$$a(b + d) = b(a + c) \Longrightarrow ab^{-1} = cd^{-1}$$

Resumen

Axioma 1 (Axiomas de Cuerpo de los Números Reales)**.** En el conjunto de los números reales se tienen los siguientes axiomas:

1. **Conmutatividad:** Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma y su producto es un real, independiente del orden en que se operen los elementos x, y, es decir:

$$(\forall\, x, y \in \mathbb{R}) : x + y = y + x \in \mathbb{R}$$
$$(\forall\, x, y \in \mathbb{R}) : x \cdot y = y \cdot x \in \mathbb{R}$$

2. **Asociatividad:** Para cualesquiera elementos de $\mathbb{R}$ que se estén operando se pueden asociar de la siguiente manera:

$$(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}) : x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}) : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

3. **Distributividad:** Para cualesquiera elementos de $\mathbb{R}$ que se estén operando se pueden distribuir de la siguiente manera:

$$(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}) : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$
$$(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}) : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

4. **Existencia del Elemento Neutro para la Adición y para la Multiplicación:** En $\mathbb{R}$ existen los llamados elementos neutros para la adición y multiplicación de este conjunto, es decir:

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}) : x + e = x$$
$$(\forall\, x \in \mathbb{R}) : x \cdot w = x$$

5. **Existencia de Elementos Inversos:** Para cada $x \in \mathbb{R}$ existen reales que se llaman **opuestos** o **inversos aditivos** de x, que satisfacen:

$$x \ + \text{opuesto}(x) = 0$$

   Para cada $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, existen reales que se llaman **inversos multiplicativos** o **recíprocos** de x, que satisfacen:

$$x \ \cdot \text{recíproco}(x) = 1$$

Teorema 1 (Unicidad del Elemento Neutro)**.** El elemento neutro para la suma y para el producto es único.

Teorema 2 (Unicidad del Elemento Inverso)**.** Para todo $x \in \mathbb{R}$, el inverso aditivo es único. Si $x \neq 0$, el inverso multiplicativo es único.

Notación 1. Al único elemento neutro de la suma o adición en $\mathbb{R}$ se le llama **cero** denotado por 0 y al único elemento neutro de la multiplicación o producto en $\mathbb{R}$ se le llama **uno** denotado por 1. Al único elemento inverso de la suma o adición en $\mathbb{R}$ se denota por $-x$ y al único elemento inverso de la multiplicación o producto en $\mathbb{R}$ se denota por x^{-1}, además, si no hay peligro de confusión, en adelante se anotara xy, para referirnos al producto $x \cdot y$, con $x, y \in \mathbb{R}$

Proposición 1 (Tabla del Cero)**.** [1] Sea $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ un Cuerpo, con $0 \in \mathbb{R}$ su Neutro Aditivo, entonces:

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0, \text{ 0 Neutro Aditivo de } \mathbb{R}$$

Proposición 2 (Ley Cancelativa de la Suma)**.** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$a + b = a + c \Longrightarrow b = c$$

Proposición 3 (Ley Cancelativa del Producto)**.** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ se tiene

$$a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c$$

Teorema 3 (Solución de la Ecuación Lineal $a + x = b$, con $a, b, x \in \mathbb{R}$)**.** Sean $a, b, x \in \mathbb{R}$, se tiene que la ecuación lineal $a + x = b$ siempre tiene solución y esta es única, la cual es de la forma $x = b + (-a)$.

Teorema 4 (Solución de la Ecuación Lineal $a \cdot x = b$, con $a, b, x \in \mathbb{R}$)**.** Sean $a, b, x \in \mathbb{R}$, se tiene que la ecuación lineal $a \cdot x = b$ siempre tiene solución y esta es única, la cual es de la forma $x = b \cdot a^{-1}$.

Definición 1 (Diferencia y Cociente en $\mathbb{R}$)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, se llama *diferencia* entre b y a al único número real d, definido como:

$$d = b + (-a) \Longrightarrow d = b - a$$

Se llama *cociente* entre a y b al único número real c, definido como:

$$c = b \cdot a^{-1} \Longrightarrow c = \frac{b}{a}$$

En el numerador debe ir un número distinto de cero.

Comentario. Sea $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, de la definición anterior, se cumple que $a = \dfrac{a}{1} \wedge \dfrac{1}{a} = a^{-1}$.

[1] Importante propiedad, recordar su demostración.