Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Civil Industrial
IN-3171 – Modelamiento y Optimización

Resumen - Lagrangeano y KKT

Profesores: Gonzalo Muñoz y Daniel Rossi
Auxiliares: Felipe Fierro, Felipe Hueitra, Anais Muñoz, Leonardo Navarro, Jimmy Pirul

Recapitulación

Estamos estudiando problemas del tipo:

$$\min \; f(x)$$

$$\text{sujeto a:} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p$$

donde las funciones $h_j(x)$ son lineales afines.

Función Lagrangiana

Definimos la función Lagrangiana $\mathcal{L}$ como:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$$

donde:

- $\lambda_i \geq 0$ son los multiplicadores de las restricciones de desigualdad $g_i(x) \leq 0$,
- $\mu_j \in \mathbb{R}$ son los multiplicadores de las restricciones de igualdad $h_j(x) = 0$.

Relajación Lagrangiana:
Planteamos la relajación Lagrangiana para λ, μ como el problema sin restricciones:

$$d(\lambda, \mu) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$$

donde $d(\lambda, \mu)$ es la **función dual Lagrangiana**.

Lema
Sea $(\omega, \mu) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p$ y p el valor óptimo del problema original. Entonces, se cumple que:

$$d(\omega, \mu) \leq p,$$

La mejor cota inferior:

Como sabemos, la función dual $d(\omega, \mu)$ nos da una cota inferior para el problema original. La mejor cota inferior dada por el Lagrangiano es:

$$d^* = \max \{d(\omega, \mu) : \omega \geq 0\}.$$

Este es el problema dual.

1. **Dualidad Débil:**

   Se conoce como **duality débil** a la siguiente relación:

   $$d^* \leq p$$

2. **Gap de Dualidad:**

   El **gap de dualidad** se define como la diferencia entre el valor óptimo primal p^* y el valor óptimo dual d^*:

   $$p^* - d^* \geq 0$$

3. **Dualidad Fuerte:**

   Cuando el gap de dualidad es igual a cero, es decir:

   $$p^* - d^* = 0,$$

   decimos que el par primal-dual satisface **duality fuerte**.

Teorema de Dualidad Fuerte

Bajo condiciones de convexidad y regularidad del problema primal, el valor óptimo del dual es igual al valor óptimo del primal:

$$d^* = \theta(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*) = p$$

Convexidad: Tenemos garantía de que el problema primal es convexo si se cumple lo siguiente:

1. $f(x)$ es convexa (en el caso de minimización),
2. $g_i(x)$ son funciones convexas,
3. $h_j(x)$ son funciones afines (lineales).

Regularidad o Condición de Calificación (Condición de Slater): Existe un punto estrictamente factible, es decir:

$$\exists x : g_i(x) < 0 \quad \forall i, \quad h_j(x) = 0 \quad \forall j$$

Condiciones KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

1. **Factibilidad primal:**

$$\begin{aligned} g_i(x^*) &\leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ h_j(x^*) &= 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

2. **Factibilidad dual:**

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

3. **Estacionariedad:**

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

4. **Holgura complementaria:**

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Siempre que se cumpla dualidad fuerte, existirá un par primal-dual que satisface las condiciones KKT.