

Resumen - Optimizacion No Lineal

Profesores: Gonzalo Muñoz y Daniel Rossi

Auxiliares: Felipe Fierro, Felipe Hueitra, Anais Muñoz, Leonardo Navarro, Jimmy Pirul

Problemas No Lineales

Los problemas no lineales que se trabajarán tendrán la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Donde $f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones generales, y $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones lineales afines.

Definiciones Útiles

Necesitaremos las siguientes definiciones:

- x es **solución factible** si

$$x \in S := \{z \in \mathbb{R}^n : g_i(z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, p\}.$$

- x es un **óptimo global** si $x \in S$ y

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in S.$$

- x es un **óptimo local** si $x \in S$ y existe una vecindad N de x tal que

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in N \cap S.$$

Condiciones de Convexidad

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función, tenemos las siguientes condiciones de convexidad:

- **Condición de primer orden:**

Si f es diferenciable, entonces f es convexa si y solo si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) \geq f(y) + (x - y)^T \nabla f(y),$$

- **Condición de segundo orden:**

Si f es dos veces diferenciable, entonces f es convexa si y solo si:

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Nota: Decimos que una matriz H es **semidefinida positiva** (s.d.p.) si:

$$x^T H x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- H es s.d.p. si todos sus valores propios son no negativos.
- H es s.d.p. si todos sus menores principales son no negativos:

$$\det H([1 : i, 1 : i]) \geq 0, \quad \forall i$$

Teorema (Weierstrass)

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, y la región factible S es cerrada y acotada (compacta), entonces:

$$\min_{x \in S} f(x) \quad \text{y} \quad \max_{x \in S} f(x)$$

tienen un óptimo global.

Cuando f, g_i son funciones convexas y h_j son funciones lineales afines, el conjunto factible es convexo y el problema se llama *problema convexo*.

Teorema:

Si el problema es convexo, entonces un óptimo local es un óptimo global.