Resumen - Sensibilidad

Profesores: Gonzalo Muñoz y Daniel Rossi
Auxiliares: Felipe Fierro, Felipe Hueitra, Anais Muñoz, Leonardo Navarro, Jimmy Pirul

Análisis de sensibilidad: Modificación en el lado derecho

Supongamos que queremos analizar cómo varía la solución óptima al modificar **una única componente** del lado derecho b. Específicamente, consideramos el cambio:

$$b_i \mapsto b_i + \Delta$$

para algún índice i, manteniendo el resto de los valores de b constantes.

1. **Costos reducidos:**

   Los costos reducidos se definen como:

   $$\bar{c} = c^T - c_B^T B^{-1} A$$

   Esta expresión no involucra b, por lo tanto:

   $\bar{c}$ es **insensible** a cambios en b_i.

2. **Factibilidad primal:**

   La solución básica factible se ajusta como:

   $$x_B = B^{-1}(b + \Delta e_i)$$

   donde e_i es el vector canónico con 1 en la posición i y ceros en el resto. La base se mantiene factible si:

   $$x_B = B^{-1}b + \Delta B^{-1} e_i \geq 0$$

   Es decir, el cambio Δ debe ser lo suficientemente pequeño para que las componentes de x_B no se vuelvan negativas.

3. **Cambio en el valor objetivo:**

   El nuevo valor de la función objetivo es:

   $$z = c_B^T x_B = c_B^T B^{-1}(b + \Delta e_i) = c_B^T B^{-1} b + \Delta \cdot c_B^T B^{-1} e_i$$

Es decir:

$$\Delta z = \Delta \cdot y_i^*$$

donde $y^* = B^{-T} c_B$ es la solución óptima dual, y y_i^* es su componente i-ésima.

Conclusión: el óptimo dual y_i^* indica cómo varía el valor óptimo primal ante cambios en b_i.

Precio sombra (o costos marginales).

De la discusión anterior, concluimos que los valores óptimos del dual (en particular y_i^*) representan el cambio en el valor óptimo del problema primal ante una variación unitaria en la componente b_i del lado derecho.

En otras palabras, y_i^* indica el beneficio o costo marginal de disponer de una unidad adicional del recurso asociado a la restricción i. Esto se conoce como el precio sombra de dicha restricción.

Interpretación: El precio sombra permite cuantificar el valor económico de relajar o endurecer una restricción.

Análisis de sensibilidad: Cambios en el vector de costos

El análisis de sensibilidad respecto a los coeficientes del vector de costos busca determinar cómo afecta una modificación en c a la optimalidad de una base dada. Consideramos dos casos: cambios en variables no básicas y en variables básicas.

1. Cambio en el costo de una variable no básica

Supongamos que modificamos el costo de una variable no básica x_j en una cantidad Δ, es decir:

$$c_j \mapsto c_j + \Delta$$

- La solución básica $x_B = B^{-1}b$ se mantiene sin cambios, por lo tanto sigue siendo factible.
- Los costos reducidos cambian:

$$\bar{c}_N^{(nuevo)} = (c_N + \Delta e_j) - c_B^T B^{-1} N = \bar{c}_N + \Delta e_j$$

- Para que la base siga siendo óptima, se requiere:

$$\bar{c}_j^{(nuevo)} = \bar{c}_j + \Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -\bar{c}_j$$

- El valor de la función objetivo no cambia, ya que $x_j = 0$ en esta base.

2. Cambio en el costo de una variable básica

Supongamos ahora que modificamos el costo de una variable básica x_i en una cantidad Δ, es decir:

$$c_i \mapsto c_i + \Delta$$

- La solución básica $x_B = B^{-1}b$ sigue siendo factible, pues no se modifica ni B ni b.

- Los costos reducidos cambian:

$$\bar{c}_N^{(nuevo)} = c_N - (c_B + \Delta e_i)^T B^{-1} N = \bar{c}_N - \Delta \cdot \left(e_i^T B^{-1} N \right)$$

  Esto significa que cada componente $\bar{c}_{Nk}^{(nuevo)}$ se ajusta en función de la fila i-ésima de $B^{-1}N$.

- Para mantener la optimalidad, se debe cumplir:

$$\bar{c}_N^{(nuevo)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \cdot (B^{-1}N)_i \leq \bar{c}_N$$

  donde la desigualdad es componente a componente.

- El nuevo valor objetivo es:

$$z^{(nuevo)} = (c_B + \Delta e_i)^T B^{-1} b = z^{(original)} + \Delta \cdot (B^{-1}b)_i$$

  Es decir, el cambio en el valor óptimo es proporcional al valor actual de la variable básica x_i.

Conclusión:

- Para cambios en variables **no básicas**, se impone una cota inferior sobre Δ para mantener optimalidad.

- Para cambios en variables **básicas**, se impone una condición más compleja sobre Δ, que involucra toda la fila correspondiente de $B^{-1}N$, y afecta tanto los costos reducidos como el valor de la función objetivo.