Resumen - Dualidad

Profesores: Gonzalo Muñoz y Daniel Rossi
Auxiliares: Felipe Fierro, Felipe Hueitra, Anais Muñoz, Leonardo Navarro, Jimmy Pirul

Dual de un Problema Lineal

Problema primal:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & a_i^T x \geq b_i, \quad i \in M_1 \\ & a_i^T x \leq b_i, \quad i \in M_2 \\ & a_i^T x = b_i, \quad i \in M_3 \\ & x_j \geq 0, \quad j \in N_1 \\ & x_j \leq 0, \quad j \in N_2 \\ & x_j \text{ libre}, \quad j \in N_3 \end{aligned}$$

Problema dual:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s.a.} \quad & y_i \geq 0, \quad i \in M_1 \\ & y_i \leq 0, \quad i \in M_2 \\ & y_i \text{ libre}, \quad i \in M_3 \\ & A_j^T y \leq c_j, \quad j \in N_1 \\ & A_j^T y \geq c_j, \quad j \in N_2 \\ & A_j^T y = c_j, \quad j \in N_3 \end{aligned}$$

Notación sobre la matriz de restricciones

La matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, que representa los coeficientes de las restricciones de un problema lineal, puede escribirse de dos formas equivalentes:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1- \\ -a_2- \\ \vdots \\ -a_m- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

- Cada fila a_i representa los coeficientes de una restricción (es decir, un vector fila).
- Cada columna A_j representa los coeficientes asociados a una variable x_j en todas las restricciones (es decir, un vector columna).

Corolario

El dual del problema dual es el problema primal original.

Teorema de Dualidad Débil

Sea x una solución factible para el problema primal (de minimización) y y una solución factible para su dual (de maximización). Entonces:

$$b^T y \leq c^T x.$$

Corolario

Si x es solución factible para el primal e y es solución factible para el dual tales que $b^T y = c^T x$, entonces x **e** y **son soluciones óptimas** para el primal y el dual, respectivamente.

Corolario

Si el valor óptimo del primal es **no acotado inferiormente** (es decir, tiende a $-\infty$), entonces el dual es infactible. Si el valor óptimo del dual es **no acotado superiormente** (es decir, tiende a $+\infty$), entonces el primal es infactible.

Teorema de Dualidad Fuerte

Si el problema primal (de minimización) tiene solución óptima, entonces el dual (de maximización) también la tiene, y **ambos alcanzan el mismo valor óptimo**.

Combinaciones posibles entre primal y dual

Primal \ Dual	Alcanza su óptimo	No acotado	Infactible
Alcanza su óptimo	Posible, y los valores son iguales	Imposible	Imposible
No acotado	Imposible	Imposible	Posible
Infactible	Imposible	Posible	Posible

Holgura complementaria

Sean x e y soluciones factibles para el primal y dual respectivamente.
Luego, x e y son óptimos para el primal y dual respectivamente si y solo si

$$y_i(a_i^T x - b_i) = 0, \quad \text{para todo } i,$$
$$x_j(c_j - A_j^T y) = 0, \quad \text{para todo } j.$$