

Clase de repaso Pre-Control 1

Profesores: Gonzalo Muñoz y Daniel Rossi

Auxiliares: Felipe Fierro, Felipe Hueitra, Anais Muñoz, Leonardo Navarro, Jimmy Pirul

Pregunta 1 - Modelamiento

Una empresa de telefonía celular desea instalar antenas para atender a un conjunto I de áreas de servicio. La empresa dispone de un conjunto J de posibles ubicaciones para instalar las antenas. Si una torre se instala en la ubicación $j \in J$, entonces a_{ij} es la intensidad de su señal en el área $i \in I$. Para que un área se considere atendida debe haber una antena con intensidad mayor o igual que T en esa área. Las señales de antenas no se suman en un área pues causan interferencia. Instalar una antena en la ubicación j en J tiene un costo p_j y la empresa dispone de un presupuesto P .

- (a) Formule el problema de decidir donde instalar antenas de forma de maximizar el número de áreas atendidas como un problema lineal con variables binarias o enteras. (Hint: puede ser útil definir el conjunto de ubicaciones válidas para área i , es decir, $J_i = \{j \in J \mid a_{ij} \geq T\}$).
- (b) Suponga que para atender una área no pueden haber dos antenas con intensidad mayor que T porque producen interferencia. Modifique el problema anterior para considerar esta restricción.
- (c) Considere ahora que existe un conjunto $J_{CH} \subset J$ de posibles ubicaciones que se encuentran en el centro histórico de la ciudad. Por motivos de patrimonio cultural se desea restringir el número de torres instaladas en el centro histórico. Esto lleva a que el número de torres instaladas en el centro histórico no puede ser más que el 30 % de todas las antenas instaladas. Modifique el problema anterior para considerar esta restricción.

Solución:

- (a) Para ello, definamos las siguientes variables de decisión:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se instala la torre de antena en ubicación } j \in J \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{el área } i \in I \text{ es atendida} \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Luego, las restricciones a considerar son las siguientes:

- **Se cumple el presupuesto:**

$$\sum_{j \in J} x_j p_j \leq P$$

- **Relación entre variables:** El área $i \in I$ se considera atendida si hay una antena instalada con intensidad mayor a T .

$$y_i \leq \sum_{j \in J_i} x_j \quad \forall i \in I$$

- **Naturaleza de variables:**

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I$$

Ahora, la función objetivo es maximizar las áreas atendidas, por lo tanto:

Función Objetivo

$$\max \sum_{i \in I} y_i$$

(b) Para ello, definimos la siguiente variable binaria:

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{si hay dos o más antenas activas para } i \in I \text{ (con } a_{ij} \geq T) \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Solo nos falta relacionar lógicamente esta variable con el resto del problema, entonces:

$$\sum_{j \in J_i} x_j - 1 \leq M q_i \quad \forall i \in I$$

Con M lo suficientemente grande. Por ejemplo, puede ser $M = |J|$ (Además, si hay más de una antena activa i , no está cubierto).

$$y_i + q_i \leq 1 \quad \forall i \in I$$

Forma alternativa:

Es posible simplificar la definición de la variable binaria q_i introduciendo directamente al problema la siguiente relación (esta solución es más acotada, pero posiblemente más difícil de identificar a primera vista):

$$\sum x_i \leq M(1 - y_i) + y_i$$

(c) • Se desea cuidar el patrimonio cultural

$$\sum_{j \in J_{CH}} x_j \leq 0.3 \sum_{j \in J} x_j$$

Pregunta 2: Geometria

1. Considere el siguiente problema de optimización lineal

$$(PL) \quad \min \quad x_1$$

Sujeto a:

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

donde $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Llame P a la región factible del problema (PL).

- (a) Proponga valores para a_1, a_2, b que aseguren que el problema (PL) tenga una única solución óptima. ¿Cuál es el único óptimo para los valores que propuso?
- (b) Determine si P contiene una línea. ¿Depende su respuesta de los valores de a_1, a_2, b ?
Indicación: para la parte (b), si argumenta con un dibujo obtendrá puntaje parcial. Para obtener puntaje completo debe demostrar formalmente si es que posee una línea o no.

2. Considere el problema de optimización

$$\min c^T x$$

Sujeto a:

$$Ax = 0$$

Muestre que si $\hat{x}$ es factible, $\lambda \hat{x}$ también es factible para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilice esto para argumentar que este problema de optimización tiene 2 opciones:

- Su valor óptimo es 0, o
- El problema es no-acotado (es decir, su valor óptimo es $-\infty$).

Solución:

1. (a) Primero, veamos la región factible sin la restricción que debemos crear:

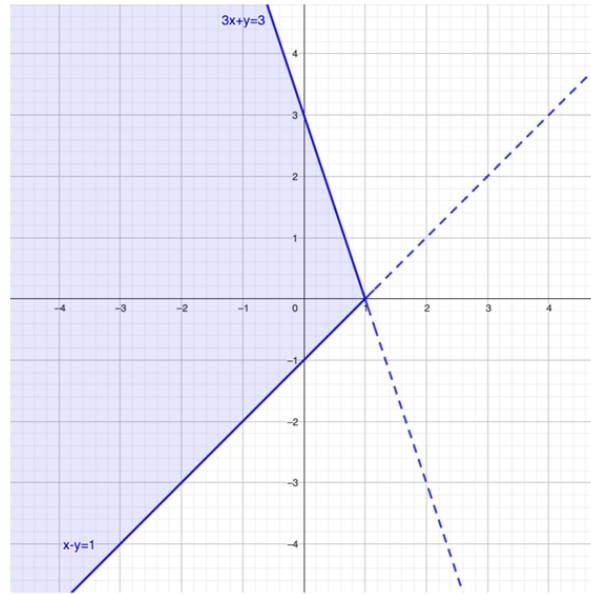


Figura 1: Región factible sin restricción propuesta

El poliedro actual es no acotado y debido a la función objetivo el problema también es no acotado (el valor de la función objetivo es $-\infty$). Para que exista una única solución debemos proponer una restricción que acote los x_1 factibles por abajo. Se necesita que la restricción tenga un vector normal $\mathbf{c}$ con valores “entre” los vectores normales de las otras restricciones y que no sea una recta vertical. Considerando lo anterior, se propone agregar la restricción $3x_1 - x_2 \geq 3$ y formar el siguiente poliedro.

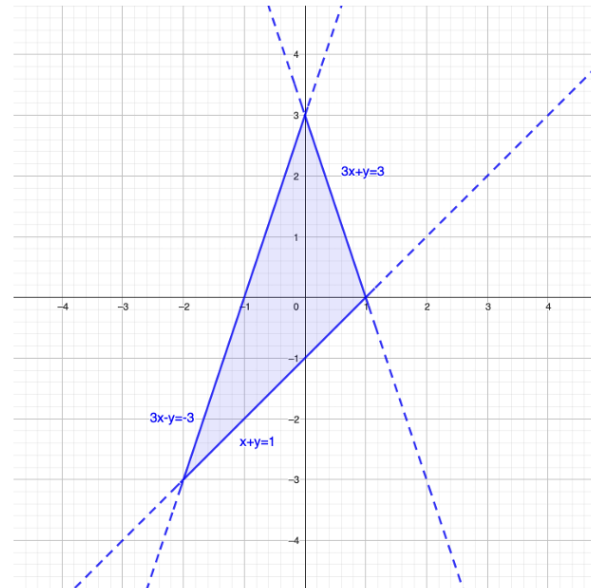


Figura 2: Región factible con restricción propuesta

Para el poliedro propuesto, el óptimo es único y corresponde al punto $(-2, -3)$.

(b) Se proponen dos formas de resolver esta parte:

- Usando el teorema 21 del apunte del curso se tiene que un poliedro no vacío no contiene una línea si y sólo si posee al menos un punto extremo (o solución básica factible o vértice por el teorema de equivalencia). Gráficamente se puede observar que P posee un punto extremo en $(1,0)$, el cual es independiente de los valores de a_1 , a_2 y b . De esta forma, concluimos que P no posee líneas, independientemente de los valores de a_1 , a_2 y b .
- Demostraremos que $(1,0)$ es solución básica factible. Las restricciones $x_1 - x_2 \leq 1$ y $3x_1 + x_2 \leq 3$ son activas en $(1,0)$ pues:

$$1 - 0 = 1$$

$$3 \cdot 1 + 0 = 3$$

Tenemos $2 = n$ restricciones activas en el punto, con vectores normales que son l.i. $((-1, -1)$ y $(3, 1))$, por lo tanto $(1,0)$ es solución básica factible.

2. Considere x factible, por lo tanto cumple que $Ax = 0$, luego:

$$A(\lambda x) = \lambda Ax = 0.$$

Tenemos que si x es factible, entonces λx también es factible.

Por otra parte, el problema puede ser infactible, no acotado o tener un óptimo finito, como el vector $\hat{x} = 0$ es factible en P concluimos que el problema no es infactible. Notamos también que $c'\hat{x} = 0$, por lo tanto $\min c'x \leq 0$.

Ahora considere existe $x^* \in P$ tal que $c'x^* \neq 0$, si evaluamos el valor de λx^* en la función objetivo obtenemos

$$c'(\lambda x^*) = \lambda c'x^*.$$

Notamos que λ puede crecer infinitamente (hacia infinito positivo o infinito negativo) y λx^* seguirá siendo factible, de esta forma, el valor de la función objetivo podrá crecer indefinidamente hasta menos infinito (tomando λ apropiado). Se concluye que el problema tiene dos opciones: tener valor óptimo igual a 0 o ser no acotado.

Considerando lo anterior, concluimos que el poliedro tiene 2 opciones: su valor óptimo es 0 o el problema es no acotado.

Pregunta 3 - Geometría

Para responder las siguientes preguntas considere un problema de optimización lineal en forma estándar

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz con m filas l.i. Justifique sus respuestas.

- a) Suponga que $m = n - 1$ y que el problema es factible. Muestre que el poliedro tiene 1 o 2 soluciones básicas factibles
. Indicación: suponga que x es una SBF y determine cuántas SBF adyacentes tiene.
- b) Dada una solución básica factible, muestre que si todos los costos reducidos de las variables no básicas son > 0 , entonces la solución es el único óptimo.

Solución:

- a) Por propiedades de un poliedro en forma estándar se tiene que este no contiene líneas, por lo tanto existe al menos una solución básica factible. Por otra parte, se tienen $n - m = n - (n - 1) = 1$ variables no básicas. Como solo hay una variable no básica, entonces solo existe una única base adyacente. Por lo tanto, desde una SBF solo existe una dirección de movimiento, si es posible moverse infinitamente por dicha dirección sin salirse del poliedro entonces este es no acotado y solo existe una única base. Por otra parte, si es posible moverse por la dirección pero no hacerlo infinitamente, entonces se llega a otra SBF, desde la cual solo es posible volver a la base original. Por lo tanto, el poliedro tiene 1 o 2 soluciones básicas factibles.

Forma Alternativa

El sistema tiene $n - 1$ ecuaciones (restricciones) y n incógnitas (variables), por lo tanto, el poliedro está contenido en una línea (esto no quiere decir que exista una línea como la definida en el curso). Una línea tiene una dimensión, en este caso existen 3 opciones:

1. El poliedro es una línea infinita hacia ambos lados: Este caso no es posible ya que por propiedad de poliedro en forma estándar este no contiene líneas (que son líneas infinitas hacia ambos lados).
 2. El poliedro es una línea infinita hacia un lado: En este caso, solo se tiene una SBF que es el punto extremo de la línea.
 3. El poliedro es una línea acotada: En este caso se tienen 2 soluciones básicas factibles, una por cada punto extremo de la línea. Dentro de este caso, también es posible que la línea sea compuesta solo por un único punto, obteniendo solo una SBF.
- b) Sea x SBF con $\bar{C}_N > 0$, pdq: x es el único óptimo.
procedemos por contradicción.

Sea y también óptimo con $x \neq y$, Es posible tomar la dirección:

$$d = y - x$$

nota: Como $y \in \mathbb{P}$ ($\mathbf{A}y = b$) y se tiene

$$y = x + d$$

$$b = \mathbf{A}y = \mathbf{A}(x + d) = \mathbf{A}x + \mathbf{A}d \quad (\text{de acuerdo a que}) \quad \mathbf{A}x = b$$

$$\therefore \mathbf{A}d = 0$$

Se tendrá entonces

$$0 = Ad = Bd_B + Nd_N = 0$$

$$d_B = -B^{-1}Nd_N$$

Paralelamente, como tanto x como y son óptimos, movernos en la dirección d no afecta el costo, así:

$$0 = c^T(y - x) = c^Td$$

$$0 = c_B^Td_B + c_N^Td_N$$

$$0 = c_B^T(-B^{-1}Nd_N) + c_N^Td_N$$

$$0 = (c_N^T - c_B^TB^{-1}N) d_N \tag{1}$$

Por enunciado, los costos reducidos de las variables no básicas son estrictamente mayores a cero, es decir, el vector de costos reducidos tiene todas sus componentes estrictamente positivas.

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^TB^{-1}N > 0$$

Como se tiene que $d_N \geq 0$ (es decir, todos los componentes de la dirección no básica son positivos), para que se cumpla (1), todas las componentes de la dirección no básica deben ser 0 (pues la suma de cosas mayores o iguales a 0 solo es 0 si cada término por separado es 0). Se tiene entonces:

$$d_N = 0 = y_N - x_N$$

$$y_N = x_N$$

Se tiene además $x_N = 0$, y por lo tanto:

$$x_N = y_N = 0$$

Como se tiene $Ax = Ay = b$ (pues tanto x como y son factibles), y dado que ya se tenía $x_N = y_N$ (es decir, la parte no básica es igual), entonces se tendrá $Bx_B = By_B$. Como B es invertible, se tendrá finalmente:

$$x_B = y_B$$

Por lo tanto:

$$y = x \quad \Rightarrow \quad \text{Contradicción}$$

$\therefore$ no existe $y \neq x$ sol óptima al problema, es decir x es el unico **optimo**.